

Bilyana Krsteska

Yasmina Markoska

MATEMATİK

Dört Yıllık Mesleki Lise eğitiminin III. sınıfları için

Jeoloji-Madencilik ve Metalurji / Jeoloji

Madencilik ve Metalurji

İnşaat-Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi

Elektroteknik / Elektroteknik

Makine / Makine

Ulaşım / Ulaşım

Nakliye ve Depolama

Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler

Kimya-Teknoloji / Kimya ve Teknoloji

Bilyana Krsteska

Yasmina Markoska

MATEMATİK

**Dört Yıllık Mesleki Lise
Eğitiminin III. Sınıfları İçin**

**ALAN / SEKTÖR: Jeoloji-Madencilik ve
Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji,
İnşaat-Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi,
Elektroteknik / Elektroteknik,
Makine / Makine,
Ulaşım / Ulaşım, Nakliye ve Depolama,
Tekstil-Deri / Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler ve
Kimya-Teknoloji / Kimya ve Teknoloji**

MATEMATİK

Dört Yıllık Mesleki Lise

Eğitiminin III. Sınıfları İçin

ALAN / SEKTÖR: Jeoloji-Madencilik ve Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji, İnşaat-Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi, Elektroteknik / Elektroteknik, Makine / Makine, Ulaşım / Ulaşım, Nakliye ve Depolama, Tekstil-Deri / Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler ve Kimya-Teknoloji / Kimya ve Teknoloji

Yazarlar:

Bilyana Krsteska

Yasmina Markoska

İnceleyenler:

Alit İbraimi

Yagoda Tanuşoska

Tsana Naumovska

Orijinal baskının başlığı:

МАТЕМАТИКА

за III година на средното стручно четиригодишно образование

СТРУКА/СЕКТОР: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, Транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи и Хемиско-технолошка/Хемија и технологија

Билјана Крстеска

Јасмина Маркоска

Makedonca'dan Türkçe'ye çeviri:

Abdülgani Ali

Lektör: Ahmetnafi İbrahim

Mesleki redaksiyon: Aybeyan Selim

Editör: İlker Ali

Grafik ve teknik düzenleme: Vesna Depinovska - ARS STUDIO

Çizimler: Bilyana Krsteska, Yasmina Markoska

Yayımcı: Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı,
“Az. Kiril ve Metodiy” Sok. no.54, 1000 Üsküp

Yayın yeri ve yılı: Üsküp, 2025

Dört yıllık mesleki lise eğitimin III. sınıfları için MATEMATİK (Jeoloji-Madencilik ve Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji, İnşaat-Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi, Elektroteknik /Elektroteknik, Makine / Makine, Ulaşım / Ulaşım, Nakliye ve Depolama, Tekstil-Deri / Tekstil,Deri ve Benzeri Ürünler ve Kimya-Teknoloji / Kimya ve Teknoloji),konuları içeren ders kitabı 9 Mayıs 2023 tarih ve 26-1301/1 sayılı Milli Ders Kitapları Komisyonu kararı ile onaylanmıştır.

Ö N S Ö Z

Dört yıllık mesleki lise eğitimin üçüncü sınıflar için **MATEMATİK** ders kitabı, aynı adlı zorunlu dersin müfredatına uygun olarak yazılmıştır. Jeoloji-Madencilik ve Metalurji alanındaki öğrencilere, Jeoloji, Madencilik ve Metalurji sektörüne, İnşaat-Jeodezi alanındaki öğrencilere, İnşaat ve Jeodezi sektörüne, Elektroteknik alanındaki öğrencilere, Elektroteknik sektörüne, Makine alanındaki öğrencilere, Makine sektörüne, Ulaşım alanındaki öğrencilere, Ulaşım, Nakliye ve Depolama sektörüne, Tekstil-Deri alanındaki öğrencilere, Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler sektörüne ve Kimya-Teknoloji alanındaki öğrencilere, Kimya ve Teknoloji sektörüne yöneliktir.

Yazarlar, öngörülen içeriği müfredatın uygulanmasına yönelik didaktik-metodik kılavuza uygun olarak işlemeye çalışmışlardır. Ders kitabı modüler olarak tasarlanmıştır ve beş modüler üniteden oluşmaktadır:

- Üstel Fonksiyon. Üstel Denklem
- Logaritmik Fonksiyon. Logaritmik Denklem
- Herhangi Açının Trigonometrik Fonksiyonları
- Düzlemde Analitik Geometri
- Kombinasyon ve Olasılık

Her bir ders konusu kapsamında, kural olarak çözülmüş örnekler ve çizimlerle gösterilen öngörülen içerikler işlenmiştir. Her ders ünitesinin sonunda, derste bağımsız çalışma veya ev ödevi için alıştırmalar verilmiştir, bu da dersin devamı niteliğindedir ve her ders konusunun sonunda materyalin tekrarı ve pekiştirilmesi için alıştırmalar bulunmaktadır. Alıştırmaların çözümleri ve cevapları ve yazarların seçimine göre, bazen bunların nasıl çözüleceğine dair talimatlar ders kitabının sonunda verilmiştir.

Bu kitabın öğrencilerin matematiği daha çok sevmelerine ve sırlarına erişmelerine katkıda bulunacağına inandıklarından ötürü, yazarlar içeriğin iyileştirilmesi için her türlü iyi niyetli eleştiri veya yorum için şimdiden minnettar olacaklardır.

Haziran, 2021

Yazarlar

1. ÜSTEL FONKSİYON. ÜSTEL DENKLEM

1.1. Üstel Fonksiyonun Kavramı ve Temel Özellikleri

Üstel Fonksiyon Kavramı

Bu derste, reel üslü kuvvet kavramıyla yakından ilişkili olan üstel fonksiyon kavramını tanıatacağız. Bu nedenle, başlangıçta reel üslü kuvvet kavramını hatırlayacak ve temel özelliklerini listeleyeceğiz.

Herhangi bir $a > 0$ reel sayısı ve herhangi bir x reel sayısı için, a^x kuvveti tek olarak belli olacak şekilde tanımlanmış bir reel sayıdır. Aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1° Her x reel sayısı için, $a^x > 0$;

2° $a^0 = 1$;

3° Her x ve y reel sayısı için, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

4° Her x ve y reel sayısı için, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

5° Her x ve y reel sayısı için, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

6° Her x ve y reel sayısı için, $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$;

7° Her x ve y reel sayısı için, $(ab)^x = a^x b^x$

8° Her x ve y reel sayısı için, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

9° $a > 1$ ve $x < y$ ise, $a^x < a^y$;

10° $0 < a < 1$ ve $x < y$ ise, $a^x > a^y$;

11° $a^x > 1$, $a > 1$, $x > 0$ için;

12° $a^x < 1$, $a > 1$, $x < 0$ için;

13° $a^x < 1$, $0 < a$, $x > 0$ için;

14° $x > 0$, $0 < a < 1$, $x < 0$ için;

15° $a > 0$, $a \neq 1$, $A > 0$ için, $a^x = A$ olacak şekilde bir tek x reel sayısı vardır.

Herhangi bir $a > 0$ reel sayısı ve herhangi bir x reel sayısı için a^x kuvvetinin benzersiz şekilde tanımlanmış bir reel sayı olması, yeni bir reel fonksiyon sınıfının tanıtılmasına olanak tanır.

Tanım 1. $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $y = f(x) = a^x$ biçimindeki fonksiyona, **üstel fonksiyon** denir.

$a \neq 1$ sınırlaması, $a = 1$ olduğunda $f(x) = a^x = 1^x = 1$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olmasından kaynaklanmaktadır ve onu üstel fonksiyonlar sınıfına dahil etmeyeceğiz.

Örnek 1. $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 0,25^x$, $y = (\sqrt{5})^x$ fonksiyonları üstel fonksiyonlara örnektir.

Alıştırma 2. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri üsteldir?

a) $y = x^3$ b) $y = 7^{x+1}$ c) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ d) $y = 4^{-\sqrt{x}}$

Çözüm. b), c) ve d) altındaki fonksiyonlar üsteldir.

Üstel Fonksiyonun Temel Özellikleri

Üstel fonksiyonun tanımı ve reel üslü kuvvetin özelliklerini kullanarak, üstel fonksiyonun aşağıdaki özelliklerine ulaşırız.

- $a > 0$ ve $a \neq 1$ için a^x kuvveti x 'in her değeri için tanımlıdır.

Bu nedenle, üstel fonksiyonun tanım kümesi D_f reel sayılar kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}$

- Reel üslü kuvvetin 1° ve 15° özelliklerinden, üstel fonksiyonun değer kümesinin tüm pozitif reel sayılardan oluştuğu sonucu çıkar, yani $V_f = \mathbb{R}^+$.

- Ayrıca, 10° ve 15° özelliklerinden, her üstel fonksiyonun $y = a^x$ grafiğinin x ekseninin üzerinde kesintisiz bir çizgi olduğu sonucuna varabiliriz.

- $a^0 = 1$ olduğundan, her $a > 0$ için, üstel fonksiyonun grafiği y eksenini $(0,1)$ noktasında keser.

- 9° ve 10° özelliklerinden, $a > 1$ için $x_1 < x_2$ ise $x_1 < x_2$ ve $0 < a < 1$ için $x_1 < x_2$ ise $a^{x_1} < a^{x_2}$ olduğunu elde ederiz. Bu, $y = a^x$ fonksiyonunun monoton olduğu anlamına gelir. Daha doğrusu, $a > 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu reel sayılar kümesinde monoton artandır, $0 < a < 1$ için ise, $y = a^x$ fonksiyonu reel sayılar kümesinde monoton azalandır.

Örnek 3. $y = 2^x$ fonksiyonunun özelliklerini belirtelim.

Fonksiyonun tanım kümesi D_f reel sayılar kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}$, fonksiyonun değer kümesi ise tüm pozitif reel sayılardan oluşur, yani $V_f = \mathbb{R}^+$.

Fonksiyonun grafiği x ekseninin üzerinde kesintisiz bir çizgidir ve y eksenini $(0,1)$ noktasında keser.

$2 > 1$ olduğundan fonksiyon reel sayılar kümesinde artandır.

Alıştırma 4. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz:

a) $y = 2^{x+1}$ b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $y = 3^{\frac{1}{x}}$ d) $y = 4^{\sqrt{x}}$

Çözüm. a) Tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}$.

b) Tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}$.

c) $\frac{1}{x}$ kesri, $x \neq 0$ olan tüm reel sayılar için tanımlıdır, bu nedenle $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Karekök negatif olmayan reel sayılar için tanımlıdır, bu nedenle $D_f = [0, +\infty)$.

Alıştırma 5. Aşağıdaki fonksiyonların monotonluğunu inceleyin:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $y = 0,7^{x+2}$ d) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

Çözüm. a) ve d) altındaki fonksiyonlar, üssün tabanı 1'den büyük olduğu için monoton artandır, b) ve c) altındaki fonksiyonlar ise üssün tabanı 0 ile 1 arasında bir reel sayı olduğu için monoton azalandır.

Alıştırma 6. Verilen eşitsizliklerde hangi sayı daha büyüktür, x mi yoksa y mi?

a) $0,4^x > 0,4^y$ b) $1,4^x > 1,4^y$

Çözüm. a) $0,4^x$ üstel fonksiyonu monoton azalan olduğundan, $0,4^x > 0,4^y$ olduğunda $x < y$ olur.

b) $1,4^x$ üstel fonksiyonu monoton artan olduğundan, $1,4^x > 1,4^y$ olduğunda $x > y$ olur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri üsteldir?

a) $y = 5^{x-1}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}$ c) $y = 7^{\frac{1}{x-3}}$ d) $y = 4^{\sqrt{x+2}}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların özelliklerini belirtin:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 5,2^x$ d) $y = 0,4^x$

3. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz:

a) $y = 3^{x-2}$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ c) $y = 4^{\frac{1}{x-1}}$ d) $y = 7^{\sqrt{x+4}}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların monotonluğunu inceleyin:

a) $y = 7^{x+3}$

b) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $y = 0,2^{x-1}$

ç) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3}$

5. Verilen eşitsizliklerde hangi sayı daha büyüktür, x mi yoksa y mi?

a) $y = 7^{x+3}$

b) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^x > \left(\frac{1}{\pi}\right)^y$

1.2. Üstel Fonksiyonun Grafiği

Şimdi, $y = a^x$ üstel fonksiyonunun grafiğini seçilen bir dik koordinat sistemi xOy 'de oluşturacağız. Önceki derste belirttiğimiz özelliklerden, üstel fonksiyonun grafiğinin x ekseninin üzerinde kesintisiz bir çizgi olduğunu ve y eksenini $(0,1)$ noktasında kestiğini biliyoruz.

Örnek 1. $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Grafikten birkaç nokta buluyoruz:

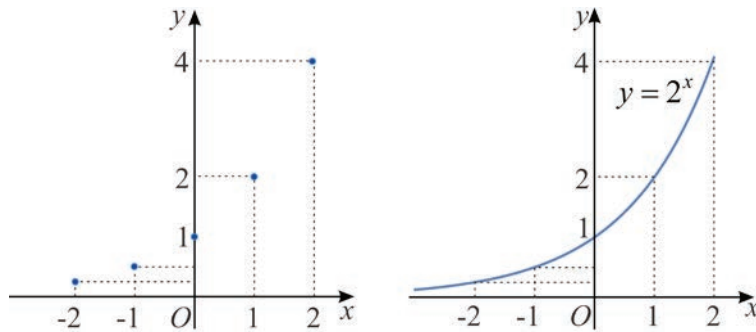
x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Tablodaki fonksiyon değerlerini şu şekilde elde ettiğimizi belirtelim:

$$y(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad y(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad y(0) = 2^0 = 1,$$

$$y(1) = 2^1 = 2, \quad y(2) = 2^2 = 4.$$

Daha sonra bunları dik koordinat sistemi xOy 'de işaretliyoruz. $y = 2^x$ 'in monoton artan bir fonksiyon olduğunu göz önünde bulundurarak daha fazla nokta işaretlersek, grafiği hakkında sezgisel bir fikir elde ederiz (şekil 1).



Şekil 1

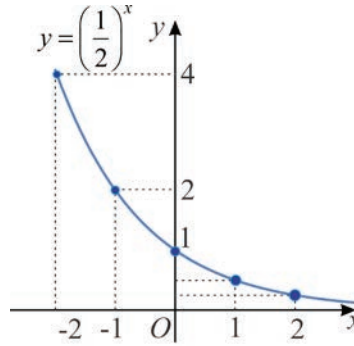
x değerleri sınırsız bir şekilde azaldığında, fonksiyonun karşılık gelen değerlerinin pozitif kaldığını, azaldığını ve asla sıfır değerine ulaşmadığını belirtelim. Bu, fonksiyonun grafiğinin x eksenine yaklaştığı, ancak asla x eksenini kesmediği veya dokunmadığı anlamına gelir. O zaman x ekseninin $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotu** olduğunu söyleriz.

Örnek 2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Grafiğinin birkaç noktasını buluyoruz:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Elde edilen noktaları xOy koordinat sisteminde işaretliyoruz. Bu noktaları kesintisiz bir çizgiyle birleştirerek fonksiyonunun grafiğini elde ederiz (şekil 2).



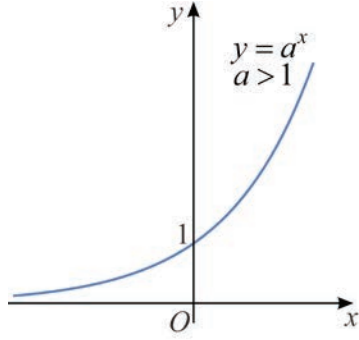
Şekil 2

x değerleri sınırsız bir şekilde arttığında, fonksiyonun karşılık gelen değerlerinin pozitif kaldığını, azaldığını ve asla sıfır değerine ulaşmadığını belirtelim. Bu, fonksiyonun grafiğinin x eksenine yaklaştığı, ancak asla x eksenini kesmediği veya dokunmadığı anlamına gelir. O zaman x ekseninin $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotu** olduğunu söyleriz.

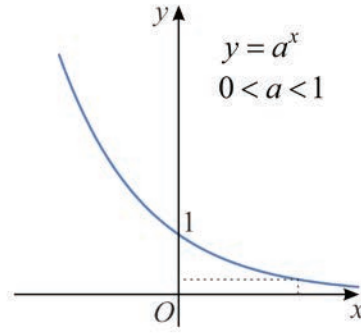
Önceki örneklerden elde edilen sonuç genel olarak da geçerlidir. Daha doğrusu, $a > 1$ için x değerleri sınırsız bir şekilde azaldığında, fonksiyonun karşılık gelen değerleri pozitif kalır, azalır ve asla sıfır değerine ulaşmaz, yani x eksenine $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotudur** (şekil 3).

Benzer şekilde, $0 < a < 1$ için x değerleri sınırsız bir şekilde arttığında, fonksiyonun karşılık gelen değerleri pozitif kalır, azalır ve asla sıfır değerine ulaşmaz, yani x - eksenine

$y = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotudur** (çizim 4).



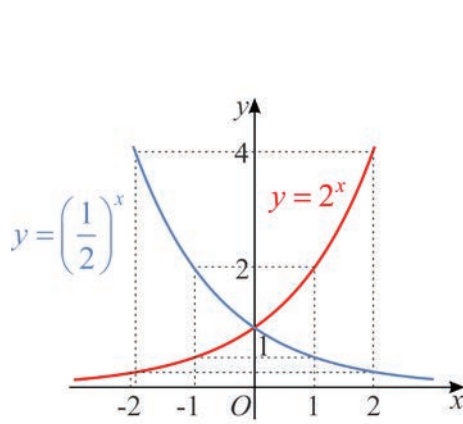
Çizim 3



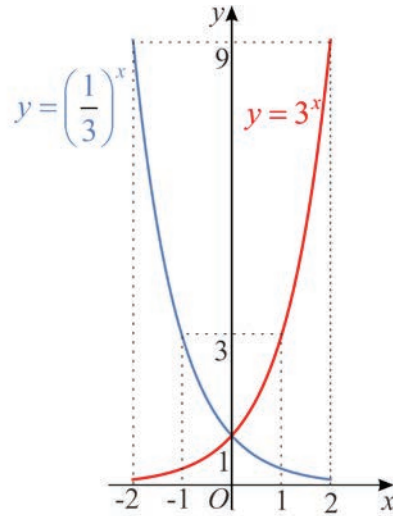
Çizim 4

Örnek 3. Aynı koordinat sisteminde aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizelim:

a) $y = 2^x$ ve $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **b)** $y = 3^x$ ve $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Çizim 5



Çizim 6

$y = 2^x$ ve $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonlarının grafiklerinin y eksenine göre simetrik olduğunu görüyoruz (şekil 5). Gerçekten de, $M(x, y)$ noktası $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiğine aitse, o zaman $N(-x, y)$ noktası $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğine aittir, çünkü

$$2^x = 2^{-(-x)} = \frac{1}{2^{-x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.$$

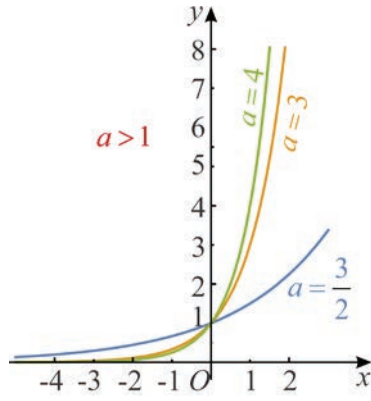
Benzer şekilde, $y = 3^x$ ve $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonlarının grafiklerinin y eksenine göre simetrik olduğu gösterilebilir (şekil 6).

Son örnekten elde edilen gözlemler, $y = a^x$ ve $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ olmak üzere herhangi iki üstel fonksiyon için geçerlidir. Gerçekten de, $M(x, y)$ noktası $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğine aitse, o zaman $y = a^x$ noktası $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, fonksiyonunun grafiğine aittir, çünkü $a^x = a^{-(-x)} = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ dir.

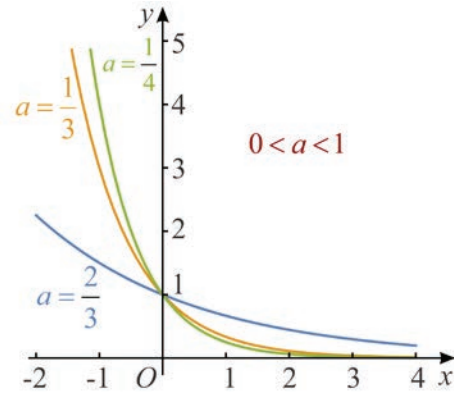
Örnek 4. Şekil 7 ve şekil 8’de bazı üstel fonksiyonların grafikleri çizilmiştir:

a) $y = a^x$ pör $a > 1$

b) $y = a^x$ pör $0 < a < 1$



Şekil 7



Şekil 8

Yukarıdaki örnekten, $x > 0$ için aynı değer için, $y = a_1^x, y = a_2^x, \dots$, üstel fonksiyonlarının değerlerinin $a_1, a_2, \dots, a_1, a_2, \dots > 1$ değerleriyle aynı sırada olduğunu ve $0 < a_1, a_2, \dots < 1$ değerleri için $a_1, a_2, \dots$, değerlerinin sırasının tersi olduğunu gözlemleyebiliriz.

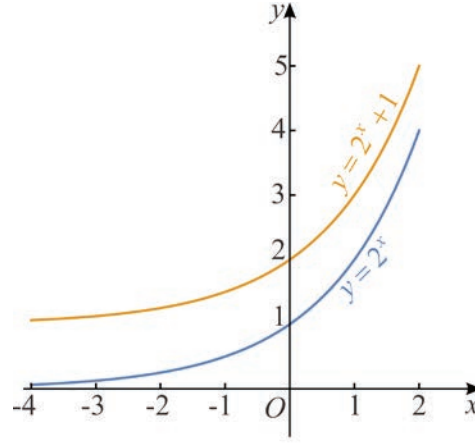
Öte yandan, $x < 0$ için aynı değer için, $y = a_1^x, y = a_2^x, \dots$, üstel fonksiyonlarının değerleri, $a_1, a_2, \dots > 1$ değerlerinin sırasının tersidir ve $0 < a_1, a_2, \dots < 1$ değerleri için $a_1, a_2, \dots$, değerleriyle aynı sıradadır.

Örnek 5. $y = 2^x + 1$. fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Grafiğinin birkaç noktasını buluyoruz:

x	$\dots$	-2	-1	0	1	2	$\dots$
$y = 2^x$	$\dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\dots$
$y = 2^x + 1$	$\dots$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	$\dots$

Yukarıdaki tabloya ek olarak, $y = 2^x + 1$ fonksiyonunun grafiği, $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiğinin y- ekseninin pozitif yönünde 1 birim kaydırılmasıyla elde edilebilir (çizim 9).

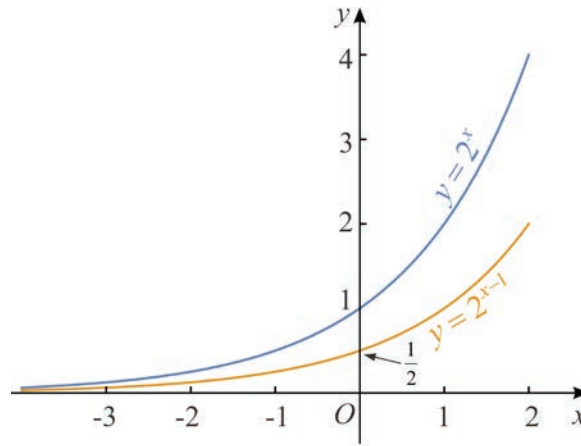


Şekil 9

Örnek 6. $y = 2^{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.
Grafiğinin birkaç noktasını buluyoruz:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = 2^x$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...
$y = 2^{x-1}$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	

Yukarıdaki tabloya ek olarak, $y = 2^{x-1}$ üstel fonksiyonunun grafiği, $y = 2^x$ üstel fonksiyonunun grafiğinin x- ekseninin pozitif yönünde 1 birim kaydırılmasıyla elde edilebilir



Şekil 10

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

$$\text{a) } y = 5^x \quad \text{b) } y = \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad \text{c) } y = -2^x \quad \text{ç) } y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizin:

$$\text{a) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \text{ aralığında } -1 \leq x \leq 2; \quad \text{b) } y = 2 \cdot 3^x, x \leq 1 \text{ için.}$$

3. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizin:

$$\text{a) } y = 2x - 2 \quad \text{b) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

1.3. Üstel Denklem

Üstel Denklem Kavramı

Tanım 1. Tabanı 1'den farklı pozitif bir reel sayı olan, bilinmeyenin üs olduğu en az bir üslü ifade bulunan bir denkleme **üstel denklem** denir.

Örnek 1. $2^x = 8$, $4^{x-3} = x - 2$, $2 \cdot 3^{x+3} = 5 \cdot 3^x + 49$ ve $x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$. ♦ denklemleri üstel denklem örnekleridir..

Alıştırma 2. Aşağıdaki denklemlerden hangileri üsteldir?

$$\text{a) } 2^{x+3} = 4^{x+2}; \quad \text{b) } (-3)^{x+7} = x + 2; \quad \text{c) } 5^{\sqrt{x-2}} = 7 + x^2; \quad \text{ç) } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}.$$

Çözüm. a), c) ve ç) altındaki denklemler üsteldir, b) altındaki denklem ise üstel değildir çünkü üssün tabanı pozitif bir reel sayı değildir.

Bazı Üstel Denklem Türlerinin Çözümü

Üstel denklemleri reel sayılar kümesinde çözeceğiz. Tüm üstel denklemleri kapsayan genel bir çözüm yöntemi yoktur. Bu nedenle, amacımız matematiğin mevcut çalışmasından bildiğimiz tekniklere dayanan belirli kuralları uygulayarak bunların bir kısmını çözmektir.

Aşağıda bazı üstel denklem türlerini çözeceğiz.

1. $A^x + m = 0$, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$ türündeki denklemler

Alıştırma 3. $3^x = 27$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen $3^x = 27$ denklemini $3^x = 3^3$ şeklinde yazıyoruz, bununla verilen denkleme denk bir denklem elde etmemizi sağlar. Daha sonra üstel fonksiyonun önemli bir özelliğini kullanacağız, yani:

$$a > 0, a \neq 1, a^{x_1} = a^{x_2} \text{ ancak ve ancak } x_1 = x_2 \text{ ise.}$$

Bu anlamda, $3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$, bu da $3^x = 27$ denkleminin tek çözümünün $x = 3$ olduğu sonucuna varmamızı sağlar. Kontrol: $3^3 = 27$.

Alıştırma 4. Aşağıdaki denklemleri çözün:

$$\text{a)} 4^x = \frac{1}{16} \quad \text{b)} 5^x = 1 \quad \text{c)} \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125} \quad \text{ç)} 25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$\text{Çözüm. a)} 4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 4^x = 4^{-2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Yoklama: } 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{b)} 5^x \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Yoklama } 5^0 = 1.$$

$$\text{c)} \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Yoklama: } \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}.$$

$$\text{ç)} 25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-4} \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$\text{Yoklama: } 25^{-2} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^4.$$

Alıştırma 5. Aşağıdaki denklemleri çözün:

$$\text{a)} \frac{5^x}{5} = \frac{3^x}{3} \quad \text{b)} 3 \cdot 7^x = 147 \quad \text{c)} \frac{4^x}{4} = \frac{7^{2x-1}}{7} \quad \text{ç)} 3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21$$

$$\text{Çözüm. a)} \frac{5^x}{5} = \frac{3^x}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{b)} 3 \cdot 7^x = 147 \Leftrightarrow 7^x = 49 \Leftrightarrow 7^x = 7^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{c)} \frac{4^x}{4} = \frac{7^{2x-1}}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} = \frac{7^{2x} \cdot 7^{-1}}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} = \frac{49^x}{49} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{49}\right)^x = \frac{4}{49}$$

$$\text{ç)} 3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x + 3^x = 21 \Leftrightarrow 3^x (9 - 3 + 1) = 21 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

II. $A^{f(x)} + m = 0$ türündeki denklemler, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$

Alıştırma 6. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

a) $3^{x+5} = 81$ b) $2^{3x-1} = 32$ c) $3^{x^2} = 81$ ç) $3^{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 1$

Çözüm. a) $3^{x+5} = 81 \Leftrightarrow 3^{x+5} = 3^4 \Leftrightarrow x+5 = 4 \Leftrightarrow x = -1$

b) $2^{3x-1} = 32 \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 2^5 \Leftrightarrow 3x-1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$

c) $3^{x^2} = 81 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

ç) $3^{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{x+1}{x} - (x+1)} = 3^0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - (x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = x(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Alıştırma 7. Aşağıdaki denklemleri çözün:

a) $3^{x^2-1} = 27$ b) $7^{x^2-3x+1} = \frac{1}{7}$ c) $5^{x^2-3x+3,5} = 125\sqrt{5}$ ç) $(25^{x+1})^{x-2} = 1$

Çözüm. a) $3^{x^2-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-1} = 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

b) $7^{x^2-3x+1} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^{x^2-3x+1} = 7^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$

c) $5^{x^2-3x+3,5} = 125\sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{x^2-3x+3,5} = 5^{3+0,5} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3,5 = 3,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

ç) $(25^{x+1})^{x-2} = 1 \Leftrightarrow (5^{2(x+1)})^{x-2} = 1 \Leftrightarrow 5^{2(x+1)(x-2)} = 5^0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$

III. $a(A^{f(x)})^2 + bA^{f(x)} + c = 0$ türündeki denklemler

$A^{f(x)} = t$ değişimi ile $A^{f(x)} = t$ ikinci dereceden denklemini elde ederiz. İkinci dereceden denklemin her çözümü için $A^{f(x)} = t$ üstel denklemini çözeriz.

Alıştırma 8. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

a) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ b) $16^x - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$ c) $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

Çözüm. a) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ denklemi, $2^x = t$ değişimi ile kökleri $t_1 = 2$ ve $t_2 = 4$ olan $t^2 - 6t + 8 = 0$ denkleminde indirgenir. Bu nedenle, yapılan değişiklikle, $2^x = 2$ ve $2^x = 4$ denklemlerini elde ederiz. Bunları çözerek verilen denklemin çözümlerini $x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ olarak buluruz.

b) $16^x - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$ denklemi, $4^x = t$ değişimi ile $t^2 - 3t + 2 = 0$ denkleminde dönüşür. Bu denklemin kökleri $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ 'dir. Buradan $4^x = 1$ ve $4^x = 2$ denklemlerini elde ederiz. Bunları çözerek verilen denklemin çözümlerini $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{1}{2}$ elde edilir.

c) $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ denklemi, $2^x = t$ değişimi ile $t^2 + 3t - 4 = 0$ denkleme dönüşür. Bu denklemin kökleri $t_1 = -4$ ve $t_2 = 1$ 'dir. Buradan $2^x = -4$ ve $2^x = 1$ denklemlerini elde ederiz. $2^x = -4$ denkleminin reel sayılar kümesinde çözümü yoktur, $2^x = -4$ denkleminin çözümü ise $x = 0$ 'dır. Dolayısıyla, verilen denklemin tek çözümü $x = 0$ 'dır. ♦

Alıştırma 9. D[enklemleri çözünüz:

a) $12^{2\sqrt[2]{81}} - \sqrt[2]{81} = 27$ **b)** $27^{2\sqrt[3]{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt[3]{9x}} + 3 = 0$ **c)** $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$

Çözüm. a) $12^{2\sqrt[2]{81}} - (\sqrt[2]{81})^2 = 27$ denklemi, $\sqrt[2]{81} = t$ değişimi ile $t^2 - 12t + 27 = 0$ denkleme dönüşür. Bu denklemin kökleri $t_1 = 9$ ve $t_2 = 3$ 'tür. Buradan $\sqrt[2]{81} = 9$ ve $\sqrt[2]{81} = 3$ denklemlerini elde ederiz. Bunları çözerek verilen denklemin çözümlerini $x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ elde edilir..

b) Verilen $27^{2\sqrt[3]{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt[3]{9x}} + 3 = 0$ denklemi, $(3^{\sqrt[3]{x}})^2 - 4 \cdot 3^{\sqrt[3]{x}} + 3 = 0$ denkleme denktir. Bu denklem, $3^{\sqrt[3]{x}} = t$ değişimi ile $t^2 - 4t + 3 = 0$ denkleme dönüşür. Bu denklemin kökleri $t^1 = 1$ ve $t^2 = 1$ 'tür. Buradan $3^{\sqrt[3]{x}} = 1$ ve $3^{\sqrt[3]{x}} = 3$ denklemlerini elde ederiz. Bunları çözerek verilen denklemin çözümlerini $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{1}{9}$ olarak buluruz.

c) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$ denklemi, $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$ denkleme eşdeğerdir. Bu denklem, $\frac{3^{2x}}{2^{2x}} + 1 = 2 \cdot \frac{3^x}{2^x}$ denkleme dönüşür $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 1 = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ değişimi ile $t^2 - 2t + 1 = 0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin çift kökü $t = 1$ 'dir. Değişimi geri yerine koyarak $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ denklemini elde ederiz ve buradan verilen denklemin tek çözümü $x = 0$ 'dır. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $9^x = \frac{1}{729}$ **b)** $5^x = \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right)^{10}$ **c)** $(\sqrt{10})^x \cdot 0,1 = 1000$

2. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $16^{x-0,5} = 32^{14-x}$ **b)** $2 \cdot 5^x = 50$ **c)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x} - \frac{125}{64} = 0$ **ç)** $10^{\frac{4}{x}} = 10^{x-3}$

3. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ **b)** $49^x + 4 \cdot 7^x - 5 = 0$
c) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$ **ç)** $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135$

KONUYU PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Verilen fonksiyonların grafiklerini yazınız:

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ **b)** $y = 0,3^x$ **c)** $y = 5^x$ **ç)** $y = \left(\frac{10}{3}\right)^x$

2. Verilen fonksiyonların grafiklerini yazınız:

a) $y = 1 - 5^x$ **b)** $y = 3^x + 1$ **c)** $y = 2^x + 1$ **ç)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

3. Hangi x ve y reel sayıları için, aşağıdakiler geçerlidir:

a) $8^x = 8^y$ **b)** $\sqrt{3}^x > \sqrt{3}^y$ **c)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$

4. Hangisi büyüktür: $a^{\frac{2}{3}}$ yoksa $a^{\frac{3}{4}}$ eğer

a) $a > 1$ **b)** $0 < a < 1$

Verilen denklemleri çözünüz:

5. $16^{x-0,5} = 32^{14-x}$ **6.** $2 \cdot 5^x = 50$ **7.** $4^x - 6 \cdot 2^x = -8$

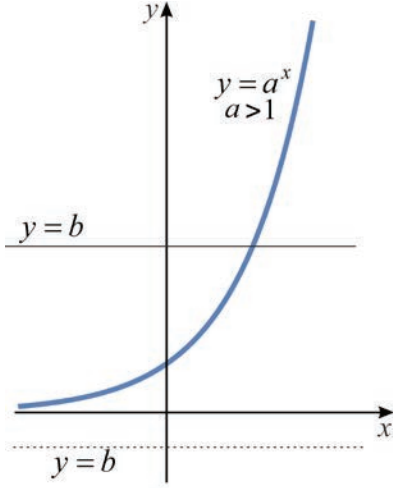
8. $(9^{x-1})^{x-1} = 9^{x-4} \cdot 3^{2x+4}$ **9.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x} - \frac{125}{64} = 0$ **10.** $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12$

11. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

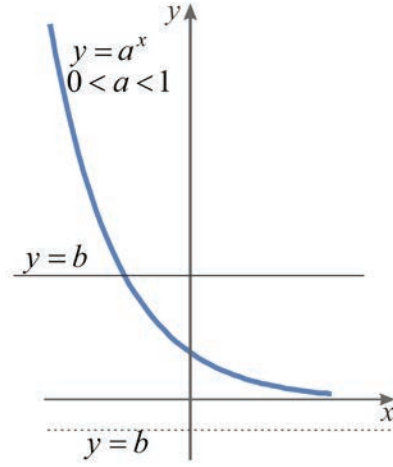
2. LOGARİTMİK FONKSİYON. LOGARİTMİK DENKLEM

2.1. Logaritma Kavramı

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ olsun. $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $y = b$ doğrusu, $y = a^x$ fonksiyonun grafiğiyle kesişebilir veya kesişmeyebilir. Şekil 1'den ($a > 1$ için) ve şekil 2'den ($0 < a < 1$) $y = b$ doğrusu, $b > 0$ durumunda $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini kestiğini, $b \leq 0$ durumunda ise kesmediğini fark edebiliriz.



Şekil 1



Şekil 2

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve değerler kümesi $\mathbb{R}^+$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $b > 0$ durumunda $a^{x_1} = b$ ve $a^{x_2} = b$ eşitliklerinden $x_1 = x_2$ gerekir. Bu nedenle, $b > 0$ durumunda $a^x = b$ olacak şekilde tek olarak belli bir x reel sayısı vardır, fakat $b \leq 0$ durumunda $a^x = b$ olacak şekilde x gerçek sayısı yoktur.

Tanım 1. $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olsun. $a^x = b$ eşitliğini sağlayan x reel sayısına a tabanına göre b nin **logaritmi** denir. Bunu

$$x = \log_a b \text{ biçiminde işaret ediyoruz.}$$

x sayısına **logaritmanın değeri**, a sayısına **logaritmanın tabanı** ve b sayısına **logaritması alınan** sayı denir.

Örnek 1.

İfade	$\log_2 8 = 3$	$\log_5 (m+3) = 2$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$
logaritmanın değeri	3	2	4
logaritmanın tabanı	2	5	$\frac{1}{3}$
logaritması alınan	8	$m+3$	$\frac{1}{81}$

$a > 0, a \neq 1, b > 0$ için, tanım gereğince

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

gerekir. Başka bir deyişle, a tabanlı ($a > 0, a \neq 1$) olan pozitif bir b gerçekte sayısının logaritması bir x reel sayısıdır ve bu sayı aslında a tabanının kuvvetidir.

Eğer $a^x = b$ denkleminde x 'i $\log_a b$ ile değiştirirsek **temel logaritma özdeşliğini** elde ederiz

$$a^{\log_a b} = b$$

Örnek 2. Aşağıdaki denklemlerin doğruluğunu kontrol edelim:

a) $\log_3 9 = 2$ **b)** $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ **c)** $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$

a) $\log_3 9 = 2$ olduğu doğrudur çünkü $3^2 = 9$ dur.

b) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ eşitliği doğrudur, çünkü $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ dir.

c) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$ çünkü $(\sqrt{5})^4 = 25$

Alıştırma 3. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\log_2 \frac{1}{4}$ **b)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 9$

Çözüm. a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ elde ederiz

Yoklama: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ olduğundan $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$ elde edilir. Yoklama: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

c) $(\sqrt{3})^4 = 9$ olduğundan $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ elde edilir. Yoklama: $(\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 9} = 9$.

Alıştırma 4. Tabanı $\frac{1}{2}$ ve logaritmi 4 olan sayıyı bulunuz.

Çözüm. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ eşitliğinden $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$ gerekir. O halde aranan sayı $\frac{1}{16}$ elde edilir.

Alıştırma 5. Tanımdan $\log_a \frac{1}{8} = 3$ olduğuna göre, a tabanını bulunuz.

Çözüm. Tanıma göre $a^3 = \frac{1}{8}$, yani $a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ olduğuna göre $a = \frac{1}{2}$ elde edilir.

Alıştırma 6. Temel logaritmik özdeşliği kullanarak şunu hesaplayınız:

a) $5^{\log_5 2}$; b) $3^{2+\log_3 2}$; c) $7^{2-\log_7 5}$.

Çözüm. Temel logaritmik özdeşliğini kullanarak şunları elde ediyoruz:

a) $5^{\log_5 2} = 2$; b) $3^{2+\log_3 5} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 5} = 9 \cdot 5 = 45$;

c) $7^{2-\log_7 5} = 7^2 \cdot \frac{1}{7^{\log_7 5}} = 49 \cdot \frac{1}{5} = \frac{49}{5}$.

Alıştırmalar

1. Verilen tabloyu doldurunuz:

İfade	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a (b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
logaritma					
logaritmanın tabanı					
logaritması aranan					

2. Verilen logaritmaların değerlerini bulunuz:

a) $\log_3 \frac{1}{9}$ b) $\log_{0,1} 0,001$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_1 \sqrt{5}$

3. Logaritma işleminin tanımından yararlanarak aşağıdakilerden x değeri belirtsin:

a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ b) $\log_x 36 = 2$ c) $\log_5 x = 0$ d) $\log_x 125 = 3$.

4. Verilen ifadelerin değerini bulunuz:

a) $5^{\log_5 2}$ b) $5^{2\log_5 3}$

5. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\log_2 8 - \log_3 9$ b) $4 \log_{\sqrt{3}} 27 + 3 \log_{\frac{1}{3}} 9$

6. x' in hangi değeri için $\log_{0,2} (x^2 - x)$ ifadesinin anlamı vardır?

2.2. Logaritmanın Temel Kurallar

Logaritma işleminin kuralları

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ ve $y > 0$ olsun.

I. Bir çarpımın logaritmi: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

İspat. $\alpha = \log_a x$ ve $\beta = \log_a y$ olsun. O halde $a^\alpha = x$ ve $a^\beta = y$ dir. $x > 0$ ve $y > 0$ koşulundan $xy > 0$ gerekir. O halde $\log_a xy$ değeri vardır. Buna göre, $a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y}$ elde edilir. Oradan da şu sonuca varılır:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Örnek 1. Bir çarpımın logaritması kuralını uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3.$$

Bir çarpımın logaritması kuralı sonlu sayıda çarpanlar olması durumunda da geçerlidir, yani $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$, için kuralı şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots + \log_a x_n$$

II. Bir Kuvvetin logaritmi: $\log_a x^s = s \log_a x$

İspat. $\alpha = \log_a x$. olsun. $x > 0$ olduğuna göre $x^s > 0$ gerekir. O halde $\log_a x^s$ değeri vardır. $a^{\log_a x^s} = x^s = (a^{\log_a x})^s = a^{s \log_a x}$ olduğundan şu kuralı elde ediyoruz:

$$\log_a x^s = s \log_a x.$$

Örnek 2. Bir kuvvetin logaritması kuralını uygulayarak şu örneği izleyiniz:

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4.$$

III. Bir bölümün logaritması kuralı: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

İspat. $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ olduğunu bilerek, çarpımın logaritması ve kuvvetin logaritması kuralını uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y.$$

Örnek 3. Bir bölümün logaritması kuralını uygulayarak şu örneği izleyiniz:

$$\log_7 0,7 = \log_7 \frac{7}{10} = \log_7 7 - \log_7 10 = 1 - \log_7 10.$$

Kuvvet logaritması kuralının bir sonucu olarak, her $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ için şunu elde ederiz:

$$\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x.$$

Örnek 4. Kuvvetin logaritması kuralını uygulayarak şu şekilde hareket ediyoruz:

$$\log_2 \sqrt[7]{32} = \log_2 \sqrt[7]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7} \log_2 2 = \frac{5}{7}.$$

Alıştırma 5. Verilen ifadelerin logaritmasını alınız:

a) $\frac{3x^4y}{z^7}$

b) $\frac{u^2 + w}{t^3 + 7}$

c) $\frac{a^2 \sqrt{b}}{c^3}$

Çözüm. Şu şekilde hareket ediyoruz:

a) $\log \frac{3x^4y}{z^7} = \log 3 + \log x^4 + \log y - \log z^7 = \log 3 + 4 \log x + \log y - 7 \log z$

b) $\log \frac{u^2 + w}{t^3 + 7} = \log(u^2 + w) - \log(t^3 + 7)$

$$c) \log \frac{a^2 \sqrt{b}}{c^3} = (\log a^2 + \log \sqrt{b}) - \log c^3 = 2 \log a + \frac{1}{2} \log b - 3 \log c.$$

Ondalık logaritmalar

Aynı tabana göre hesaplanan tüm pozitif sayıların logaritmaları kümesine **logaritmik sistem** denir. 10 tabanına göre tertiplenen logaritmalara **ondalık logaritmalar** denir. Ondalık logaritmalar $\log x$ ile işaret edilir. burada 10 tabanı yazılmadığından genellikle $\lg x$ gösterimi de sıklıkla kullanılır, yani $\log_{10} x = \log x = \lg x$.

Logaritma kuralları ondalık logaritmalar için de geçerlidir.

Örnek 6. Aşağıdaki hesaplamaları izleyelim:

$$a) \lg 10 = 1, \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2 \lg 10 = 2, \quad \lg 10000 = \lg 10^4 = 4 \lg 10 = 4;$$

$$b) \lg 0,1 = \lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1, \quad \lg 0,001 = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3.$$

Çözülen örnekten görüldüğü gibi, 1'den büyük ondalık birimin logaritmi pozitif bir tam sayı olduğu ve onluk birimdeki sıfır sayısı kadar birime sahip olduğu sonucuna varabiliriz. 1'den küçük ondalık birimin logaritmi negatif bir tam sayıdır ve ondalık birimin sıfır sayısı kadar birlere sahiptir.

$\lg x$ bir rasyonel sayı olacak şekilde x reel sayısı verilmiş olsun, yani $\lg x = k$, $k \in \mathbb{Q}$. O halde $x = 10^k$. Bu nedenle, 10^k , $k \in \mathbb{Q}$ biçiminde olmayan pozitif bir sayının ondalık logaritması bu durumda irrasyonel bir sayıdır. Ondalık gösterimde sonsuz sayıda ondalık basamağı vardır. bu yüzden, sayıyı 5 ondalık basamağa yuvarlama kuralının pratik uygulama olduğu ortaya çıkar.

Eğer A herhangi bir pozitif reel sayı ise, o zaman $10^{n-1} \leq A \leq 10^n$, olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır ve oradan $\lg 10^{n-1} \leq \lg A \leq \lg 10^n$. gerekir. Ondalık logaritmanın tanımına göre $n-1 \leq \lg A < n$ doğrudur. Son eşitsizlikten $0 \leq \lg A - (n-1) < 1$ eşitsizliği elde edilir. Buna göre

$$\lg A = (n-1) + \alpha, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ ve } 0 \leq \alpha < 1.$$

n sayısına **karakteristik**, α sayısına ise A sayısının logaritmasının **mantisi** denir. Başka bir deyişle, logaritmanın tam kısmına karakteristik, ondalık kısmına ise logaritmanın mantisi denir. Bu nedenle, karakteristik pozitif, negatif bir tam sayı veya sıfır olabilirken, mantis 0 ile 1 arasında bir sayı olabilir.

Alıştırma 7. $\lg 495,27$ 'nin karakteristiğini belirtiniz.

Çözüm. $100 \leq 495,27 < 1000$ olduğuna göre, $\lg 100 \leq \lg 495,27 < \lg 1000$, ya da $2 \leq \lg 495,27 < 3$ elde edilir. Buna göre $\lg 495,27 = 2 + \alpha$, burada $0 \leq \alpha < 1$ dir. Demek ki $\lg 495,27$ 'nin karakteristiği 2'dir. ♦

Alıştırma 8. $\lg 0,037$ 'nin karakteristiğini bulunuz.

Çözüm. $0,01 < 0,037 < 0,1$ 'den $\lg 0,01 < \lg 0,037 < \lg 0,1$ ya da $-2 < \lg A < -1$ dir. Bu nedenle, $0 \leq \alpha < 1$ olduğu durumda $\lg 0,037 = -2 + \alpha$ dir. $\lg 0,037$ 'nin karakteristiği -1 dir. ♦

Alıştırma 6 ve 7 den şu sonuca varılabilir: 1'den büyük sayıların karakteristiği, sayının tam kısmındaki basamak sayısından bir eksik olduğu, 1'den küçük sayıların karakteristiği ise negatif sayıdır ve bu sayı sıfırdan farklı ilk rakamın solundaki sıfırların sayısı kadardır.

Örnek 9. Hesap makinesini kullanarak buluyoruz:

a) $\lg 24,257 = 1,38484$

b) $\lg 1278.13 = 3.10658$

c) $\lg 0,00257 = -2,59007$.



Alıştırma 10. $\lg a = m$, $\lg b = n$, $\lg c = p$ olduğuna göre, $\frac{a^2b}{c^4}$ ifadesinin ondalık logaritmasını bulunuz.

Çözüm. Logaritma kurallarını uyguluyoruz:

$$\begin{aligned}\lg \frac{a^2b}{c^4} &= \lg a^2b - \lg c^4 = \lg a^2 + \lg b - \lg c^4 = \\ &= 2\lg a + \lg b - 4\lg c = 2m + n - 4p.\end{aligned}$$

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerin logaritmasını alınız:

a) $3ab$

b) a^2bc^5

c) $\frac{ab}{2c}$

ç) $2(a-b)$

d) $\frac{\sqrt{a}}{b^2 - c^2}$

e) $\sqrt{a^3b^2}$

2. Logaritmasının değeri bilinen x sayısını bulunuz:

a) $\log x = \log 5 - \log 2 + \log 4$

b) $\log x = 3\log 2 - 2\log 3$

c) $\log x = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 2$

ç) $\log x = \frac{1}{4}(2\log 2 - 4\log 3 + 5\log 4)$

3. $\lg 2 \approx 0,30$ ve $\lg 3 \approx 0,48$, olduğuna göre, şu logaritmaların değerlerini yaklaşık olarak bulunuz:

a) $\lg 4$, $\lg 6$, $\lg 8$, $\lg 9$

b) $\lg 12$, $\lg 16$, $\lg 18$

4. Verilen logaritmaların karakteristiklerini yazınız:

a) $\lg(0,7545 \cdot 0,0256 \cdot 0,65^2)$

b) $\lg \frac{28,5 \cdot 3,507}{0,457 \cdot 0,0293}$

ç) $\lg \sqrt[5]{\frac{129}{9775}}$

d) $\lg(0,85 \cdot \sqrt[3]{0,55})$

2.3. Farklı Tabanlı Logaritmalar Arasındaki Bağlıntılar

$a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0$ olsun.

Logaritmada taban değiştirme kuralı: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

İspat. Temel logaritma özdeşliğini kullanarak $x = a^{\log_a x}$ eşitliğin iki tarafının b tabanına göre logaritmasını alırsak $\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a$, elde edilir, yani

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Örnek 1. Logaritmanın taban değiştirme formülüne göre şu şekilde hareket ediyoruz:

$$\begin{aligned} \log_3 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 9 &= \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \log_6 9 = \\ &= \log_3 6 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 6} = \log_3 9 = 2. \diamond \end{aligned}$$

Sonuç 1. $x = b \neq 1$ olduğu durumda $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ dir.

İspat. Taban değiştirme kuralına göre, ortak taban olarak b ' yi seçersek şunu elde edeceğiz:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Örnek 2. Taban değiştirme kuralının yukarıdaki sonucunu uygulamakla

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{5} \text{ elde edilir.}$$

Sonuç 2. $s \neq 0, a > 0, a \neq 1, b > 0$, durumunda $\log_{a^s} b = \frac{1}{s} \log_a b$ dir.

İspat. Sonuç 2' yi ve kuvvetin logaritması kuralını uygulamakla

$$\log_{a^s} b = \frac{1}{\log_b a^s} = \frac{1}{s \log_b a} = \frac{1}{s} \log_a b \text{ elde edilir.}$$

Örnek 3. Önceki sonucu uygulamakla

$$\log_{2^3} 4 = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \text{ elde edilir.}$$

Sonuç 3. $s \neq 0, a > 0, a \neq 1, b > 0$, olduğu durumda $\log_{a^s} b^s = \log_a b$ dir.

İspat. Önceki sonucu ve kuvvetin logaritması kuralını uygulamakla

$$\log_{a^s} b^s = s \log_{a^s} b = s \cdot \frac{1}{s} \log_a b = \log_a b. \blacksquare$$

Örnek 4. Logaritmanın tabanına ait kuralın önceki sonucunu uygulamakla

$$\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{\frac{1}{3^3}} 9^{\frac{1}{3}} = \log_3 9 = 2 \text{ elde edilir.}$$

Örnek 5. $\lg 2 \approx 0,30$ ve $\lg 3 \approx 0,48$ olduğunu almakla $\lg_5 6$ değerini hesaplayalım:

$$\log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg(2 \cdot 3)}{\lg \frac{10}{2}} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} \approx \frac{0,30 + 0,48}{1 - 0,30} = \frac{0,78}{0,70} = \frac{39}{35}.$$

Alıştırmalar

1. Verilen eşitlikleri ispatlayınız:

a) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}.$

2. $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0,125$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

3. Verilen ifadeleri en sade şekilde yazınız:

a) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 4)$

b) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$

c) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}.$

4. $a > 0, b \neq 1, b > 0$, olduğu durumda, $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a$ dir. İspatlayınız!

2.4. Logaritma fonksiyonun kavramı ve temel özellikleri

Logaritma fonksiyonun kavramı

Logaritmayı tanımlarken $a > 0$ ve $a \neq 1$ durumunda $\log_a x$, her pozitif reel sayı x için tek olarak belli bir değere sahip olduğunu söylediğimizi hatırlayalım. Bu ise, yeni bir reel fonksiyon sınıfının tanıtılmasına olanak sağlamaktadır.

Tanım. $a > 0$ ve $a \neq 1$ durumunda $y = f(x) = \log_a x$, şeklinde fonksiyona **logaritma fonksiyonu** denir.

Örnek 1. Aşağıdaki fonksiyonlar logaritma fonksiyonlarıdır:

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = \lg x, \quad y = \ln x. \blacklozenge$$

Alıştırma 2. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri:

a) $y = \frac{1}{\log_2 x}$; b) $y = \log_x \frac{1}{x}$; c) $y = \log_3(x+1)$; ç) $y = \log x^2$,

logaritma fonksiyonudur?

Çözüm. c) ve ç) altındaki fonksiyonlar logaritmiktir.

Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

$y = f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonun tanımını ve $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, üstel fonksiyonun $y = f(x) = a^x$ özelliklerini kullanarak logaritma fonksiyonun aşağıdaki özelliklerine ulaşırız.

- $y = f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonun tanım alanı $\mathbb{R}^+$ kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}^+$.
- $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonun değerler kümesi, gerçekte sayılar kümesinin tamamıdır, yani $V_f = \mathbb{R}$.
- $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonun grafiği, I. dördül ve IV. dördülde olmak üzere sürekli fonksiyondur.
- $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonun grafiği, x - eksenini $(1,0)$ noktasında keser, $x=1$ için $y = \log_a 1 = 0$, olduğunu elde ederiz.
- $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonu tüm D_f tanım aralığında $a > 1$ için, monoton artan, $0 < a < 1$ durumunda ise monoton eksilendir.

Örnek 3. $y = \log_2 x$ fonksiyonunun özelliklerini ifade edelim.

Fonksiyonun tanım kümesi pozitif reel sayılar kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}^+$.

Fonksiyonun değerler kümesi reel sayılar kümesidir, yani $V_f = \mathbb{R}$.

Fonksiyonun grafiği I-dördülden ve IV-dördülden geçen ve x - eksenini $(1,0)$ noktasında kesen sürekli bir eğridir.

$2 > 1$ olduğuna göre, fonksiyon monoton artandır.

Alıştırma 4. Verilen logaritma fonksiyonun tanım aralığını bulunuz:

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ c) $y = \lg(x+3)$ ç) $y = \log_{\frac{1}{4}} x + 7$.

Çözüm. a) Fonksiyonun tanım aralığı, pozitif reel sayılar kümesidir, $D_f = \mathbb{R}^+$.

b) Fonksiyonun tanım aralığı, pozitif reel sayılar kümesidir, $D_f = \mathbb{R}^+$.

c) $x+3 > 0$ olduğuna göre, tanım aralığı $D_f = (-3, +\infty)$ dir.

ç) Tanım aralığı pozitif reel sayılar kümesidir, $D_f = \mathbb{R}^+$.

Alıştırma 5. Verilen fonksiyonların monotonluğunu belirtiniz:

a) $y = \log x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \log_{0,3}(x-3)$ d) $y = \log_5(x^2 + 4)$

Çözüm. a) ve d) şıklarındaki fonksiyonlar logaritmanın tabanı 1'den büyük olduğu için monoton olarak artmaktadır, b) ve c) şıklarındaki fonksiyonlar ise, logaritmanın tabanı 0 ile 1 arasında bir gerçek sayı olduğundan monoton eksilendir.

Alıştırma 6. Logaritmik fonksiyonların özelliklerinden yararlanarak, hangi sayı daha büyük olduğunu gösteriniz:

a) $\log_3 2$ veya $\log_3 \sqrt{2}$ b) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{5}$ veya $\log_{\frac{1}{7}} \frac{3}{8}$

Çözüm. a) Logaritma fonksiyonunun monotonluğundan $\log_3 2 > \log_3 \sqrt{2}$, dir, çünkü $2 > \sqrt{2}$ ve $3 > 1$ dir.

b) Logaritma fonksiyonunun monotonluğundan $\log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{5} < \log_{\frac{1}{7}} \frac{3}{8}$ dir, çünkü $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$ ve $\frac{1}{7} < 1$ dir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi logaritma fonksiyonudur:

a) $y = \log_5(x-1)$ b) $\log_x 7$ c) $\log_x 7$ d) $y = \sqrt[3]{\log x^2}$

2. Aşağıdaki logaritma fonksiyonların özelliklerini ifade ediniz:

a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_{0,3} x$ c) $y = \log_{\frac{1}{7}} x$

3. Aşağıdaki logaritma fonksiyonların tanım kümesini bulunuz:

a) $y = \log_5 x + 12$ b) $y = \lg(x+9)$ c) $y = \log_3(x-4)$
d) $y = \log_2(x^2 + x)$ e) $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2 + 5x + 2).$

4. Aşağıdaki logaritma fonksiyonların monotonluğunu inceleyiniz:

a) $y = -\log_2 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{7}}(2x+1)$ c) $y = \ln x$

5. Verilen eşitsizliklerde hangisi büyüktür, a yoksa b?

a) $\log_5 a > \log_5 b$ b) $\log_{0,5} a > \log_{0,5} b$

2.5. Logaritma fonksiyonunun grafiği

Şimdi $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun grafiğini seçilen bir xOy kartezyen koordinat sisteminde çizeceğiz. Logaritma fonksiyonun grafiğiyle ilgili önceki dersimizde belirttiğimiz özelliklerden, grafiğin sürekli bir eğri olduğunu ve x – eksenini $(1,0)$ noktasında kestiğini biliyoruz.

Örnek 1. $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Tabloyu kullanarak grafiğin birkaç noktasını buluyoruz:

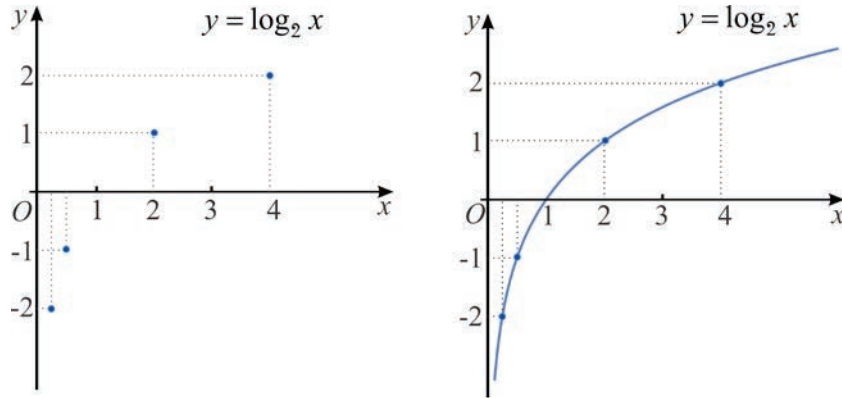
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Tablodaki fonksiyonun değerlerini şu şekilde elde ettiğimizi belirtelim:

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = -2 \log_2 2 = -2, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1,$$

$$y(1) = \log_2 1 = 0, \quad y(2) = \log_2 2 = 1, \quad y(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.$$

Daha sonra, bunları seçilen xOy dik koordinat sisteminde uyguluyoruz. $y = \log_2 x$ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olduğunu göz önünde bulundurarak daha fazla nokta seçerek fonksiyonun grafiğinin sezgisel bir temsilini tasarlıyoruz (şekil 1).



Şekil 1

x 'in değerleri 0'a yaklaştıkça fonksiyonun karşılık gelen değerlerinin sınırsız olarak azaldığını fark edebiliriz. Bu demektir ki, fonksiyonun grafiği y – eksenine yaklaştığı ancak hiçbir zaman y – eksenine dokunmayacağı anlamına gelir. Bu durumda y – eksenini $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotu** olduğunu diyoruz.

Örnek 2. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Önceki örnekte olduğu gibi benzer şekilde, tabloyu kullanarak grafiğin birkaç noktasını buluyoruz:

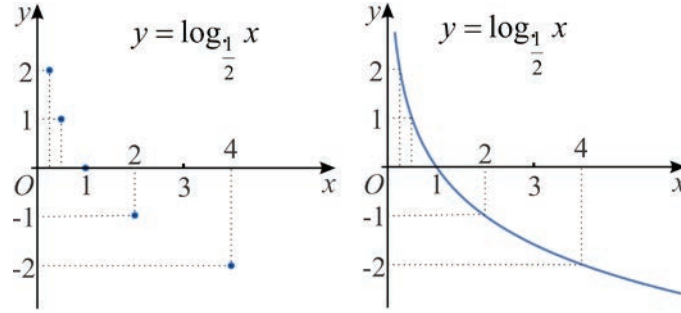
x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	-2	-1	0	1	2

Tablodaki fonksiyonun değerlerini şu hesaplamalarla elde ediyoruz:

$$y(4) = y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, \quad y(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1, \quad y(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0,$$

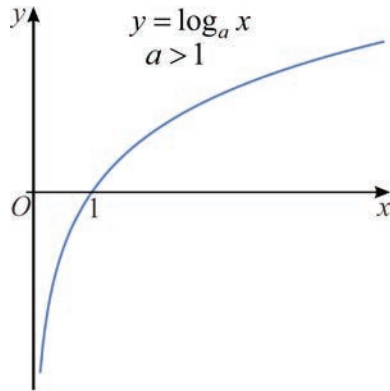
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2.$$

Elde edilen noktaları xOy dik açılı koordinat sisteminde göçürüyoruz. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonu monoton eksilen olduğunu göz önünde bulundurarak, daha çok noktaların belirtilmesiyle, fonksiyonun grafiğinin şeklini sezgisel olarak tasarlıyoruz (şekil 2).

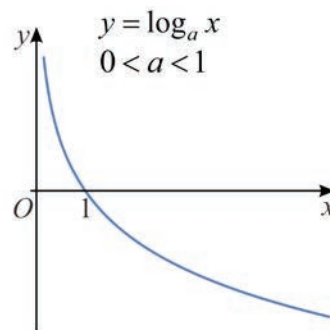


Şekil 2

x 'in değerleri 0'a yaklaştıkça fonksiyonun karşılık gelen değerlerinin sınırsız olarak arttığını fark edebiliriz. Bu demektir ki, fonksiyonun grafiği y – eksenine yaklaştığı ancak hiçbir zaman y – eksenine dokunmayacağı anlamına gelir. Bu durumda y – eksenini $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotu** olduğunu diyoruz.



Şekil 3

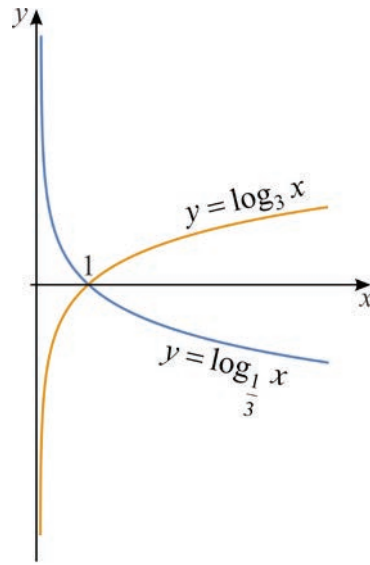


Şekil 4

Önceki örneklerden elde edilen sonuç, genel durum için de geçerlidir. Daha doğrusu, $a > 1$ için, x 'in değerleri 0'a yaklaştıkça, fonksiyonun karşılık gelen değerleri sınırsız azalır, yani y – eksenini $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotudur** (Şekil 3).

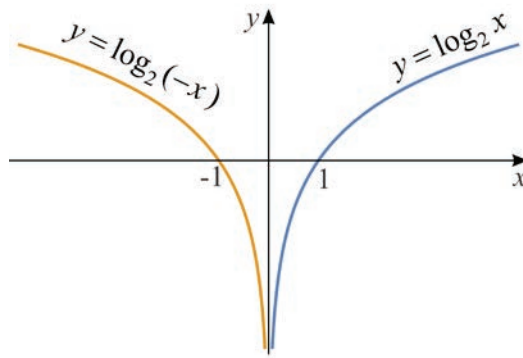
Benzer şekilde, $0 < a < 1$ durumunda, x 'in değerleri 0'a yaklaştıkça, fonksiyonun karşılık gelen değerleri sınırsız olarak artar, yani y -ekseni $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin **asimptotudur** (Şekil 4).

Örnek 4. Aynı koordinat sisteminde $y = \log_3 x$ ve $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonların grafiklerini çizelim. $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$ olduğuna göre, onlar x -eksenine göre simetrikler (Şekil 5).



Şekil 5

Bu örneğin sonucu genel durumda da geçerlidir. $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$ eşitliği nedeniyle $y = \log_a x$ ve $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ fonksiyonların grafikleri x -eksenine göre simetrikler.



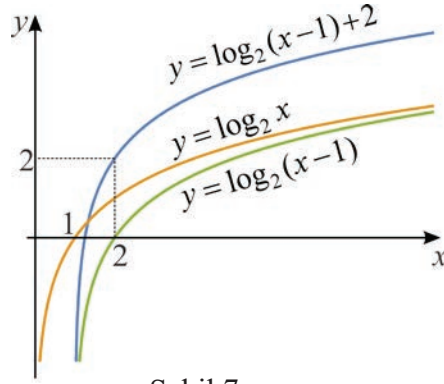
Şekil 6

Örnek 5. $y = \log_2 x$ ve $y = \log_2(-x)$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizersek, bunların y - eksenine göre simetrik olduğunu fark edeceğiz (Şekil 6).

Önceki örnekten çıkan sonuç genel durum için de geçerlidir, yani fonksiyonların grafikleri $y = \log_a x$ ve $y = \log_a(-x)$ y - eksenine göre simetriktir.

Örnek 6. $y = \log_2(x-1) + 2$ fonksiyonunun grafiği, $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğinden iki adımda elde edilir:

- $y = \log_2(x-1)$ fonksiyonunun grafiği, $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğinin 1 birim sağa ötelenmesiyle elde edilir.
- $y = \log_2(x-1) + 2$ fonksiyonunun grafiği, $y = \log_2(x-1)$ fonksiyonunun grafiğinin 2 birim yukarı ötelenmesiyle elde edilir (şekil 7).



Şekil 7

Logaritmik fonksiyon $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ pozitif reel sayılar kümesinde monoton olduğundan, en küçük ve en büyük değere sahip değildir.

Alıştırma 7. Logaritmaların işaretini belirleyin:

- a)** $\log_8 0,6$ **b)** $\log_{0,8} 0,2$.

Çözüm. a) Logaritmanın tabanı $8 > 1$ 'dir. $y = \log_a x$, $a > 1$ ve $x = 0,6 < 1$ logaritmik fonksiyonunun grafiğini göz önünde bulundurursak, $\log_8 0,6 < 0$ sonucuna varırız.

b) Logaritmanın tabanı $0 < 0,8 < 1$ 'dir. $y = \log_a x$, $0 < a < 1$ ve $x = 0,2 < 1$ fonksiyonunun grafiğini göz önünde bulundurursak, $\log_{0,8} 0,2 > 0$ sonucuna varırız.

Alıştırmalar

1. Verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

- a)** $y = -\log_2 x$ **b)** $y = -\log_{\frac{1}{3}}(x)$ **c)** $y = \log_3(-x)$ **ç)** $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$.

2. Verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

- a)** $y = \log_2(x+1)$ **b)** $y = \log_2 x + 1$ **c)** $y = \log_3(x-2) + 3$.

3. Verilen logaritmaların işaretini belirtiniz:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 0,2$ b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ c) $\log_{0,7} 100$ d) $\log_3(\sqrt{2}-1)$.

4. x 'in hangi değeri için,

a) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ b) $y = \log_3(x+2)$ c) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x-1)$

logaritma fonksiyonları pozitif değerler alır, hangileri için ise negatif değerler alır?

2.6. Logaritmik Denklemler

Bilinmeyen en az bir logaritması aranılan ifadenin içinde ya da logaritma tabanında olan denklemlere **logaritmik denklemler** denir.

Örnek 1. Verilen denklemler logaritmik denklemlerden örneklerdir:

$$\log_2(x+4) = 7, \quad \log_{2x}(5+x^2) = 9, \quad \log_5(3x-2) = \log_5 x.$$

Alıştırma 2. Verilen denklemlerden hangileri logaritmik denklemlerdir:

a) $\log_3(x^2+4) = 1$ b) $\log_2 \sqrt{3} = x$ c) $\sqrt{x-2} \log 5^x = \log(1+x)$

Çözüm. a) ve c) şıklarındaki denklemler logaritmiktir, b) şıkındaki denklem ise logaritmik değildir; çünkü bilinmeyen, logaritmada veya en az bir logaritmanın tabanında değildir.

Bazı logaritmik denklemlerin çözümü

Logaritmik denklemleri reel sayılar kümesinde çözeceğiz. Logaritmik denklemlerin tüm sınıfını kapsayacak genel bir çözüm kuralı yoktur. Bu nedenle amacımız logaritmanın tanımını, logaritmanın kurallarını ve logaritmik fonksiyonun özelliklerini uygulayarak bazılarını çözmektir.

Aşağıda bazı logaritmik denklem türlerini çözmeye çalışacağız. $a > 0$, $a \neq 1$ olsun.

I. $\log_a f(x) = b$ cinsinden logaritmali denklemlerin çözümü

Logaritmanın tanımından şu eşitlik gerekir:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x).$$

Alıştırma 2. Denklemleri çözünüz:

a) $\log_3(x+5) = 3$ b) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-7x+13) = 0$ c) $\log_5(x^2-9)^2 = 2$

Çözüm. a) Logaritmanın tanımından, verilen $\log_3(x+5) = 3$ denkleminin $x+5 = 3^3$ denklemine denktir, yani çözümü $x+5 = 27$ lineer denklemin çözümüne eşit olduğu sonucuna varılır ve çözümü $x = 22$ dir.

b) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 7x + 13) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 13 = (\sqrt{3})^0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_1 = 3$ ve $x_1 = 3$.
c) $\log_5(x^2 - 9)^2 = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 9)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 56 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2,$
 $x_{3,4} = \pm \sqrt{14}.$

Şıkkındaki logaritmik denklemi çözmek için kuvvetin logaritması kuralını kullanırsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \log_5(x^2 - 9)^2 = 2 &\Leftrightarrow 2 \cdot \log_5(x^2 - 9) = 2 \Leftrightarrow \log_5(x^2 - 9) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 5 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Denklemin yalnızca iki çözümünü elde ettik, çünkü kuvvetin logaritması kuralını yanlış uyguladık, yani $\log_a b^2 = 2 \log_a b$, eşitliği sadece $b > 0$ durumunda doğrudur. Şöyle yazarsak kuvvetin logaritması kuralının kullanımı doğru olacaktır.

$$\log_5(x^2 - 9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \log_5 |x^2 - 9| = 2 \Leftrightarrow \log_5 |x^2 - 9| = 1 \Leftrightarrow |x^2 - 9| = 5.$$

II. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde logaritmik denklemlerin çözümü

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ denkleminin çözümleri $f(x) = g(x)$ denkleminin çözülmesiyle elde edilir. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ denkleminin her çözümü, $f(x) = g(x)$ denkleminin de çözümüdür. Genel olarak bunun tersi geçerli değildir, dolayısıyla $f(x) = g(x)$ denkleminin elde edilen çözümlerini denklemin aslı olan $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ denklemde kontrol edeceğiz.

Alıştırma 3. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$ **b)** $\lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$

Çözüm. a) $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$ denkleminin çözümleri $x^2 - 7x + 11 = x - 4$, denkleminin çözümüyle elde edilir, yani $x^2 - 8x + 15 = 0$ ikinci dereceden denklemi çözmekle elde edilir. Ancak ikinci dereceden denklemin her çözümü, logaritmik denklemin çözümleri değildir, dolayısıyla ikinci dereceden denklemin elde edilen çözümleri $x_1 = 3$ ve $x_2 = 5$ değerlerini logaritmik denklemde kontrol edeceğiz.

Yoklama: $x = 3$ için $\log_3(3^2 - 7 \cdot 3 + 11) = \log_3(3 - 4)$, , yani $\log_3(-1) = \log_3(-1)$, elde ederiz, dolayısıyla $x = 3$ çözümü logaritmik denklemin çözümü değildir.

$x = 5$ için $\log_3(5^2 - 7 \cdot 5 + 11) = \log_3(5 - 4)$, yani $\log_3 1 = \log_3 1$, elde edilir.

Demek ki, verilen logaritmik denklemin çözümü $x = 5$ 'tir.

b) $\lg(3x-2-2x^2) = \lg(x^2-10x-12)$ denkleminin çözümleri, $3x-2-2x^2 = x^2-10x-12$, denkleminde, yani $3x^2-13x-10=0$ ikinci derece denklemin çözülmesiyle elde edilir. Elde edilen çözümler $x_1 = 5$ ve $x_2 = -\frac{2}{3}$ değerlerini logaritmik denklemde kontrol edeceğiz.

Yoklama: $x = 5$ için, $\lg(3 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot 5^2) = \lg(5^2 - 10 \cdot 5 - 12)$, , yani $\lg(-37) = \lg(-37)$ elde edilir, bu ise mümkün değildir.

$x = 5$ için, $\lg\left\{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\} = \lg\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 12\right\}$, elde edilir. Bu

ise mümkün olmayan $\lg\left(-\frac{44}{9}\right) = \lg\left(-\frac{44}{9}\right)$, bir eşitliktir.

Demek ki, verilen logaritmik denklemin gerçek çözümü yoktur.

III. $\log_a f(x) = b$ ve $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ şeklinde denklemlere dönüşebilen denklemler

Alıştırma 4. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $\log_3(x-3) + \log_3(2x+1) = 2$ **b)** $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x-3)$

c) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$.

Çözüm. a) Bir çarpımın logaritması kuralından $\log_3(x-3) + \log_3(2x+1) = 2$ denklemini $\log_3(x-3) \cdot (2x+1) = 2$. denklemiyle denk olduğunu elde ediyoruz. Son denklemin çözümleri $2x^2 - 5x - 12 = 0$ ikinci dereceden denklemin çözülmesiyle elde edilir. Daha önce de söylediğimiz gibi, ikinci dereceden denklemin her çözümü $x_1 = 4$ ve $x_2 = -\frac{3}{2}$ logaritmik denklemin de çözümü olmayabilir. Elde edilen çözümleri hemen kontrol ederek, yani $x = 4$ 'ü ve ardından $x_2 = -\frac{3}{2}$ 'ü değiştirerek, verilen denklemin sadece bir çözümü $x = 4$ olduğunu elde edilir.

b) Bir bölümün logaritması kuralının göre, verilen denklemin $\log_5(x^2 - 6x + 7) - \log_5(x-3) = 0$ denklemiyle denk olduğunu, yani $\log_5 \frac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 0$. denklemiyle denktir. Son denklemin çözümleri, $\frac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 1$, $x \neq 3$, denklemin çözümüyle, bu ise $x^2 - 7x + 10 = 0$ denkleminde denk olarak, çözümleri $x_1 = 5$ ve $x_2 = 2$ dir. Çözümleri verilen denklemde doğrudan $x = 5$ 'i ve ardından $x = 2$ 'yi değiştirerek çözümü olup olmadığını yokluyoruz. Sonuç olarak denklemin $x = 5$ olmak üzere bir tek çözümü olduğunu buluyoruz.

c) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$ denkleminde, $\sqrt{\lg 2x} = t$ ile değiştirmekle denklem $t^2 + 3t - 4 = 0$, ikinci dereceden denkleme dönüşür ve çözümü $t_1 = 1$ ve $t_2 = -4$ tür. Bu şekilde $\sqrt{\lg 2x} = 1$,

yani $\lg 2x = 1$ denklemi elde edilir. Oradan $2x = 10$ denklemi, dolayısıyla $x = 5$ çözümü elde edilir. $\sqrt{\lg 2x} = -4$ denklemin çözümü olmadığına göre verilen denklemin bir tek çözümü vardır; $x = 5$.

Alıştırma 5. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ **b)** $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$.

Çözüm. a) Logaritma işleminin kurallarını uygulayarak şu şekilde hareket ediyoruz:

$$\begin{aligned} \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 &\Leftrightarrow \log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 &\Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16 \end{aligned}$$

Yoklama: $\log_{16} 16 + \log_4 16 + \log_2 16 = 7$

Denklemin çözümü $x = 16$ dir.

b) Logaritma işleminin kuralları gereğince $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{3^2} x + \frac{1}{\log_3 x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2 \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2 \log_3 x + 1 = 0$$

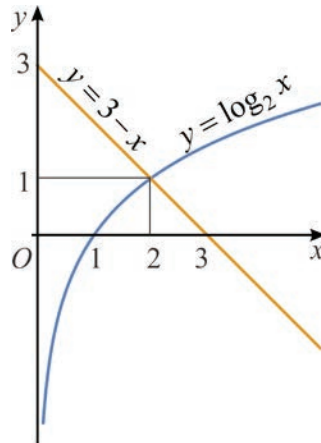
elde edilir. Elde edilen denklemde $\log_3 x = t$ yazarak, $t^2 - 2t + 1 = 0$ denklemini elde ediyoruz. Bu denklemin çözümü $t = 1$ olduğuna göre, $\log_3 x = 1$ elde edilir. Oradan da $x = 3$ elde edilir.

Yoklama: $\log_9 3 + \log_9 3 = 1 \Leftrightarrow 2 \log_9 3 = 1 \Leftrightarrow \log_9 9 = 1$

Denklemin çözümü $x = 3$ tür.

Alıştırma 6. $\log_2 x = 3 - x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem grafiksel olarak çözülebilir. Denklemin sol tarafı $y = \log_2 x$, logaritmik fonksiyon, sağ tarafı ise $y = 3 - x$ lineer fonksiyondur. Her iki fonksiyonun grafiğini aynı koordinat sistemi üzerinde çiziyoruz (şekil1). Grafikler bir M noktasında kesişir. M noktasından x- eksenine bir dikme çizerek x-eksenini kestiği noktada $\log_2 x = 3 - x$ denkleminin çözümünü okuyoruz. Görüldüğü gibi çözüm $x = 2$ dir.



Şekil 1

Aliřtırmalar

Aşağıdaki logaritmik denklemleri çözün:

1. $\log_{\sqrt{3}}(2x^2 - 6) = 2$. 2. $\log_3(x^2 - 5x + 7) = 1$. 3. $\log_2(x - 1) + \log_2 x = 1$.

4. $\lg(3x - 1) + \lg(12 - x) = 2$. 5. $\log_x 2 - \log_x 3 = 4$. 6. $\log_2 x - \log_{16} x = 3$.

7. $\log_3(1 + \log_3(2x - 7)) = 1$.

Verilen denklemleri grafiksel şekilde çözünüz:

8. $\log_2 x = x - 1$. 9. $\lg x = x^2$.

PEKİşTİRME ALIşTIRMALARI

1. Logaritma işleminin tanımından yararlanarak verilenlerden x 'i bulunuz:

a) $\log_x 16 = 2$ b) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$ c) $\log_x 1000 = -3$

ç) $\log_x 7 = \frac{1}{3}$ d) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ e) $\log_x 27 = \frac{1}{3}$

f) $\log_{100} x = 0,2$ g) $\log_{\frac{1}{3}} x = 8$ ğ) $\log_{125} x = -\frac{2}{3}$.

2. Verilen ifadelerin logaritmini alınız:

a) $2xy$ b) $3x^2y^2$ c) $x^2y^5\sqrt{z}$ ç) $a^{\sqrt{b}} \cdot c^3$

d) $6x^3\sqrt{y^2}$ e) $\sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y}}}$ f) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{y}}}$.

3. Logaritmi bilinen x sayısını bulunuz.

a) $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$ b) $\lg x = \lg 5 + \frac{1}{2}(\lg 8 - \lg 2)$

c) $\log x = \log 7 + \log 9 - \log 3$ ç) $\log x = 2 \log 3 + 3 \log 5$

d) $\log x = \frac{1}{3} \log 125 - (\log 3 + 2 \log \sqrt{3})$.

4. Logaritma işlemini kullanarak verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $x = \frac{333,648 \cdot 2,49}{125,36}$ b) $x = \frac{43,5 \cdot 0,26^2}{6,38^3 \cdot 1,28}$

ç) $x = 3,25^3 \cdot \sqrt[5]{54,21}$ d) $x = \frac{8,4 \cdot \sqrt[3]{729}}{3,24}$.

5. Verilenlerin tabanını değiştiriniz:

a) $\log_2 5$ ile 4 b) $\log_3 7$ ile $\sqrt{7}$ c) $\lg 5$ ile 10^{-1} .

6. Farklı tabanlı logaritmaların bağıntılarından yararlanarak, verilenleri en sade şekilde yazınız:

$$\text{a) } \frac{\log_{3^2} 25 + \log_3 7}{\log_3 \frac{5^2 \cdot 7^2}{3^2} + 2} \quad \text{b) } \log_2 x(x+1) - \log_2 (x+1)^2 + \log_4 (x+1).$$

7. Verilen ifadelerin değerlerini hesaplayınız:

$$\text{a) } \log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0,125 \quad \text{b) } \log_3 2 + \log_7 245 + \log_{12} 7 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} 5 + \log_{\frac{1}{12}} 84.$$

8. Verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

$$\text{a) } y = -\log_{\frac{1}{4}} x \quad \text{b) } y = -\log_4 x \quad \text{c) } y = \log_5 |x| \quad \text{ç) } y = \left| \log_{\frac{1}{10}} x \right|.$$

9. Verilen ifadenin tanımlı olduğu tüm reel sayıları bulunuz:

$$\text{a) } \log_3 \left(2x - \frac{1}{2} \right) \quad \text{b) } \log_2 (x+1) \quad \text{c) } \log_{10} \frac{x+3}{x+1} \quad \text{ç) } \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 5x + 6).$$

Verilen denklemleri çözünüz:

$$\text{10. } \lg x + \lg(x-3) = 1. \quad \text{11. } \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1.$$

$$\text{12. } 7 \log_{25} x - \log_5 x = 5. \quad \text{13. } \log_{x-1} 3 = 2.$$

$$\text{14. } \log_5 (x-3) = \log_5 (x^2 - 5x - 10). \quad \text{15. } \log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}.$$

$$\text{16. } \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6. \quad \text{17. } 1 + \log_2 (x-1) = \log_{(x-1)} 4.$$

$$\text{18. } \frac{2}{4 - \lg x} + \frac{1}{2 + \lg x} = 1.$$

20. Verilen denklemleri çözünüz:

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{3}} x = x + 1 \quad \text{b) } \log_{\frac{1}{10}} x = x^2 + 1.$$

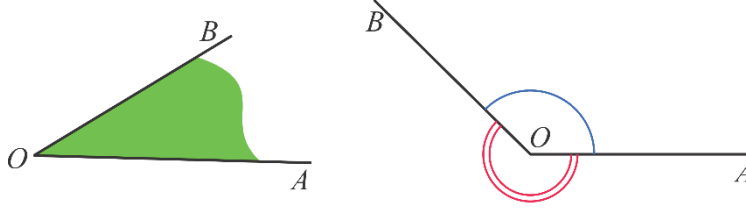
3. HERHANGİ BİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI

3.1. Açı Ölçümü. Açı Kavramının Genişletilmesi

Düzlem geometrisinden daha önce bildiğiniz birkaç tanımı hatırlayalım. Bilindiği gibi, ortak bir başlangıç noktasına sahip iki yarı doğru düzlemi iki parçaya böler ve bu yarı doğrular parçaların sınırları olarak ortaya çıkar.

Tanım 1. Ortak bir başlangıç noktasına sahip yarı doğruların ve düzlemin parçalarından birinin birleşimi açı olarak adlandırılır.

Şekil 1’de ortak bir başlangıç noktası olan O ’ya sahip iki yarı doğru $[OA)$ ve $[OB)$ gösterilmiştir. Yarı doğrular **açının kenarları** olarak adlandırılır, ortak başlangıç noktaları O **açının tepe noktası** olarak adlandırılır ve kenarlarda bulunmayan tüm noktaların kümesi açının **iç bölgesi** olarak adlandırılır.



Şekil 1

Ortak bir başlangıç noktası olan O ’ya sahip yarı doğrular $[OA)$ ve $[OB)$ iki açı belirler, bunları $\angle AOB$ (veya $\angle BOA$) olarak işaretleriz. Açı işareti olarak Yunan harflerinden $\alpha, \beta, \gamma \dots$ de kullanılır, bu nedenle $\angle AOB = \alpha$ yazabiliriz. $[OA)$ ve $[OB)$ yarı doğruları çakışıyorsa, $\angle AOB$ açısı **tam açı** olarak adlandırılır.

Bir açının büyüklüğünü ifade etmek için farklı yollar vardır. Şimdiye kadar, açıları ölçmek için en sık kullandığımız ölçü birimi **derecedir**.

Bir derece (1°), tam açının 360° ’ta birine eşit olan bir açı ölçme birimidir. Daha küçük bir ölçü birimi, bir derecenin 60° ’ta birine eşit olan **bir dakikadır ($1'$)** ve bir dakikanın $60'$ ’ta birine veya bir derecenin 3600° ’de birine eşit olan **bir saniyedir ($1''$)**. Buna göre:

$$1^\circ = 60', 1' = 60'', 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \text{ ve } 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ.$$

Bu eşitliklerin yardımıyla, verilen bir açıyı ondalık derece biçimine ve tersine dönüştürebiliriz.

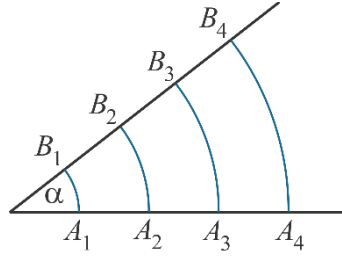
Örnek 1. $23^\circ 34' 12''$ açısı ondalık derece biçimine dönüştürüldüğünde:

$$23^\circ 42' 18'' = 23^\circ + \left(\frac{42}{60}\right)^\circ + \left(\frac{18}{3600}\right)^\circ = 23^\circ + 0,7^\circ + 0,005^\circ = 23,705^\circ$$

Örnek 2. 47.512° açısı derece, dakika ve saniye olarak yazıldığında:

$$\begin{aligned}
 47,512^\circ &= 47^\circ + 0,512^\circ = 47^\circ + (60 \cdot 0,512)' = 47^\circ 30,72' = 47^\circ 30' + 0,72' = \\
 &= 47^\circ 30' + (60 \cdot 0,72)'' = 47^\circ 30' 43''
 \end{aligned}$$

Bir dairede, aynı merkez açılara aynı uzunlukta dairesel yaylar karşılık gelir ve tersi de geçerlidir, bu nedenle verilen bir açının büyüklüğü farklı şekillerde ifade edilebilir. Çizim 2’de, farklı yarıçaplara sahip dairelerde, aynı merkez açıya, ilgili yarıçapların büyüklüğüyle orantılı olarak farklı uzunluklarda dairesel yayların karşılık geldiğini görebiliriz.



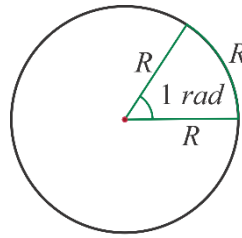
Şekil 2

Tanım 2. Bir dairesel yayının uzunluğu, bu dairenin yarıçapının uzunluğuna eşit olan bir dairedeki merkez açının büyüklüğü **bir radyan** olarak adlandırılır ve $1rad$ olarak gösterilir.

Tanıma göre, R yarıçaplı tüm dairenin merkez açısı olan tam açıda, ilgili dairesel yayın uzunluğunun $2\pi R$ olduğu, yani açının büyüklüğünün $2\pi rad$ olduğu sonucu çıkar. Öte yandan, bu açı 360° ’ye sahiptir, bu nedenle eşitleyerek $360^\circ = 2\pi rad$ elde edilir. Buradan şu sonuç elde edilir:

$$1rad = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ \approx 57^\circ 17' 45'',$$

veya $1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \approx 0,01745 rad$ dir (şekil 3).



Şekil 3

Örnek 3. Verilen açıların radyan cinsinden yazılışı:

a) $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} rad = \frac{\pi}{6} rad$,

b) $34^\circ 12' = 34^\circ + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ = 34,2^\circ = 34,2 \cdot \frac{\pi}{180} rad = 0,19\pi rad$.

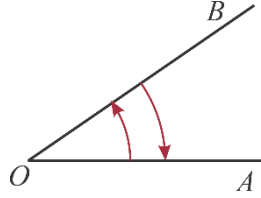
Örnek 4. Verilen açıların derece cinsinden yazılışı:

a) $\frac{\pi}{3} rad = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ,$

b) $0,48\pi rad = 0,48\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 86,4^\circ = 86^\circ 24'.$

Not. Gelecekte, bir açının yanında herhangi bir ölçü birimi işareti yoksa, radyan cinsinden verildiğini varsayacağız.

$\angle AOB$ açısı, kenarlarının birinin O tepe noktası etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir şekil olarak düşünülebilir (Şekil 4). OA kenarını düzlemde sabitlersek ve OB kenarını O noktası merkezli dönüşünü gözlemlersek, o zaman **yönlendirilmiş** veya **yönlü açıdan** bahsediyoruz. Dönüş saat yönünün tersine olduğunda açı pozitif yöne, dönüş saat yönüyle aynı olduğunda ise negatif yöne sahiptir. OA kenarına **birinci kenar** ve dönen OB kenarına ise **ikinci kenar** diyeceğiz. $\angle AOB$ 'nin **pozitif** bir açı olduğunu ve $\angle BOA$ 'nın **negatif** bir açı olduğunu ve $\angle AOB$ 'nin **tersi** olduğunu söyleriz.

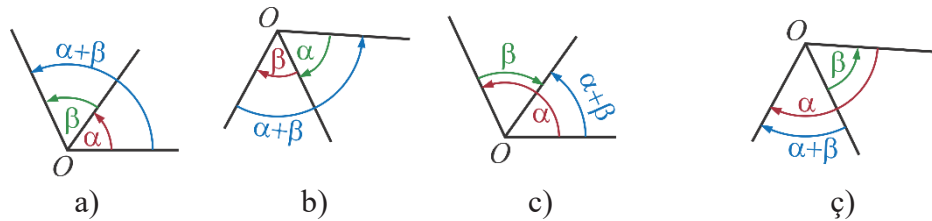


Şekil 4

Yönlü Açılarla İşlemler

İki yönlendirilmiş açı α ve β 'nin toplamı, α açısının ikinci kenarına β açısının birinci kenarını yerleştirdiğimizde elde edilen $\alpha + \beta$ açısıdır ve:

- α ve β aynı yöne sahipse, $\alpha + \beta$ de onlarla aynı yöne sahiptir (Şekil 5, a ve b).
- α pozitif ve β negatifse ve α 'nın mutlak değeri β 'nin mutlak değerinden büyükse, yani $|\alpha| > |\beta|$ ise, $\alpha + \beta$ pozitif yöne ve $|\alpha - \beta|$ büyüklüğüne sahiptir (Şekil 5, c).
- α negatif ve β pozitifse ve α 'nın mutlak değeri β 'nin mutlak değerinden büyükse, yani $|\alpha| > |\beta|$ ise, $\alpha + \beta$ negatif yöne ve $|\alpha + \beta|$ büyüklüğüne sahiptir (Şekil 5, ç).



Şekil 5

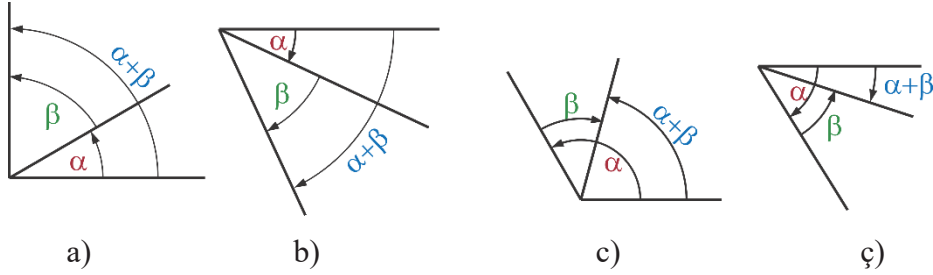
Örnek 5. Şekil 6’da $\alpha + \beta$ toplamı çizilmiştir, burada:

a) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$

b) $\alpha = 120^\circ, \beta = -45^\circ$

c) $\alpha = -25^\circ, \beta = -40^\circ$

ç) $\alpha = -58^\circ, \beta = 30^\circ$



Şekil 6

İki yönlü açının $\alpha - \beta$ farkı, aslında α açısının β açısının tersi ile toplamıdır, yani $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Örnek 6. $\beta = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$ ’nin değeri, $\alpha = 50^\circ$ açısıyla aynı yöne sahip bir açıdır.

$k \neq 0$ reel sayısının α yönlü açısı ile çarpımı, $k > 0$ için α açısının yönüyle aynı büyüklük ve yöne sahip bir açıdır ve $k < 0$ için tersidir.

Örnek 7. $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ çarpımı, $\alpha = 60^\circ$ açısıyla aynı yöne sahip bir açıdır ve $a - 2 \cdot 45^\circ = -90^\circ$ çarpımı $\alpha = 45^\circ$ açısının ters yönüne sahip bir açıdır.

Bir açının ikinci kenarı tam bir dönüş yaparsa ve ardından dönmeye devam ederse, pozitif yönde bir açı için 360° ’den büyük bir açı veya negatif yönde bir açı için 360° ’den küçük bir açı elde edilir. Bu durumda, açının ikincikenarının belirli bir genel açı β ’yi tanımladığını söyleriz.

Genel açıyı aşağıdaki genel biçimde yazacağız:

$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, 0 \leq \alpha < 360^\circ$ için, veya $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi, 0 \leq \alpha < 2\pi$ ve $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, β pozitif bir açı için;

$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, -360^\circ < \alpha \leq 0$ için veya $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi, -2\pi < \alpha \leq 0$ ve $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, β negatif bir açı için.

Burada k , pozitif veya negatif yönde dönüş sayısını (tam dönüşleri) gösterir.

Örnek 8. $\alpha = 30^\circ$ ’den sonra pozitif yönde üç tam dönüşten elde edilen açının genel biçimi $30^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 1080^\circ = 1110^\circ$ ’dir, negatif yönde iki tam dönüşten sonra $\alpha = -30^\circ$ ’den elde edilen açının genel biçimi ise $-30^\circ - 2 \cdot 360^\circ = -30^\circ - 720^\circ = -750^\circ$ ’dir.

Alıştırma 1. Aşağıdaki açıları genel biçimde yazın:

a) 1250° b) -760° c) 9π ç) $-\frac{15\pi}{2}$

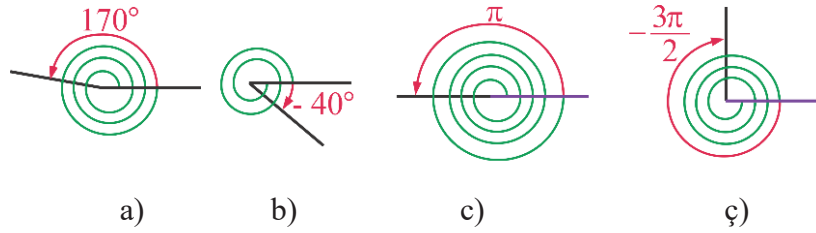
Çözüm. a) $1250^\circ = 170^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, bu da açının 170° 'lik açıdan pozitif yönde üç tam dönüşle elde edildiği anlamına gelir.

b) $-760^\circ = -40^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$, bu da açının -40° 'lik açıdan negatif yönde iki tam dönüşle elde edildiği anlamına gelir.

c) $9\pi = \pi + 4 \cdot 2\pi$, bu da bu açının π radyanlık açıdan pozitif yönde dört tam dönüşle elde edildiği sonucuna varırız.

ç) $-\frac{15\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 7\pi = -\frac{\pi}{2} - \pi - 3 \cdot 2\pi = -\frac{3\pi}{2} + (-3) \cdot 2\pi$, bu da bu açının $-\frac{3\pi}{2}$ radyanlık

açıdan negatif yönde üç tam dönüşle elde edildiği sonucuna varırız.



Şekil 7

Alıştırmalar

1. Verilen açıları radyan cinsinden yazınız:

a) 120° b) -270° c) 0°

2. Verilen açıları derece cinsinden yazınız:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $-\frac{7\pi}{8}$ c) 10

3. Açıları genel biçimde yazınız:

a) 1100° b) -680° c) $-\frac{19\pi}{3}$

4. Öğlen saat 12'den, öğleden sonra 20:10'a kadar zaman içinde saat yelkovanı ne kadar açı yapar?

3.2. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının Tanımı

Geçen yıl dik üçgende bir dar açının trigonometrik fonksiyonlarını öğrendiniz. Herhangi bir açının trigonometrik fonksiyonlarını birim çember yardımıyla tanımlıyoruz.

Tanım 1. Merkezi koordinat başlangıcında olan 1 yarıçaplı bir çember, birim **çember** olarak adlandırılır (Şekil 1).

$\angle AOB$ açısının köşesi koordinat başlangıcıyla çakışır, ilk kenar OA x -ekseninin pozitif kısmında yer alır. İkinci kenar OB , merkezi O olan dönen kenardır. Bu kenarın konumu $\angle AOB$ açısının konumunu belirler. Yani, $\angle AOB$ açısının hangi dördülde olduğu, OB kenarın hangi dördülde olduğuna bağlıdır ve tersine. İkinci kenarı eksenlerle çakışık olan açılara **dördül açıları** denir.

Örnek 1. $\angle AOB = 200^\circ$ açısı III. dördüldedir, çünkü OB kenarı o bölgededir, $\angle AOB = -300^\circ$ açısı I. dördüldedir, çünkü OB kenarı o bölgededir.

Alıştırma 1. Aşağıdaki açılar hangi dördüldedir?

- a) $\alpha = -130^\circ$ b) $\alpha = 750^\circ$ c) $\alpha = -460^\circ$ d) $\alpha = 1250^\circ$

Çözüm. a) $\alpha = -130^\circ = 230^\circ + (-360^\circ)$, bu nedenle α III. dördüldedir .

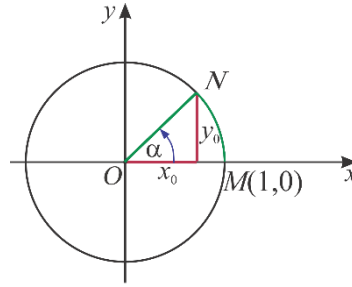
b) $\alpha = 750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, bu nedenle α I. dördüldedir.

c) $\alpha = -460^\circ = 260^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$, bu nedenle α III. dördüldedir.

d) $\alpha = 1250^\circ = 150^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, bu nedenle α II. dördüldedir.

OM kenarı ile herhangi bir $\angle AOM$ açısını alalım. N noktasının koordinatları (x_0, y_0) ise, açının kosinüs ve sinüs trigonometrik fonksiyonlarının değerleri, sırasıyla N noktasının apsisi ve ordinat değerleri olarak tanımlanır (Şekil 1) veya

$$\cos \alpha = x_0 \text{ ve } \sin \alpha = y_0$$



Şekil 1

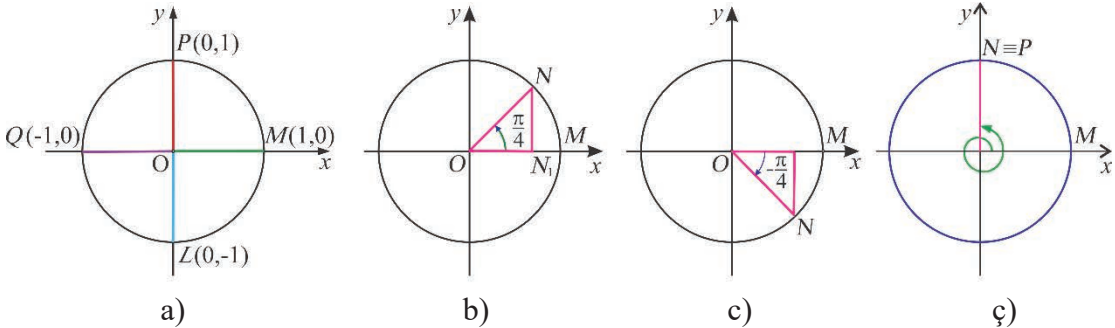
Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanımından, değerlerinin $[-1, 1]$ aralığında değiştiği sonucu elde edilir.

Alıştırma 2. Aşağıdaki açılar için $\sin \alpha$ ve $\cos \alpha$ fonksiyonlarının değerlerini bulunuz:

- a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ c) $\alpha = \pi$ d) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

- e) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ f) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ g) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$

Çözüm. Önce çemberin eksenlerle kesişim noktalarını işaretleyelim.



Şekil 2

- a) N noktası $M(1,0)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\cos 0^\circ = 1$ ve $\sin 0^\circ = 0$ (Şekil 2a).
- b) N noktası $P(0,1)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (Şekil 2a).
- c) N noktası $Q(-1,0)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\cos \pi = -1$ ve $\sin \pi = 0$ (Şekil 2a).
- ç) N noktası $T(0,-1)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ (Şekil 2a).
- d) ON_1N üçgeni N_1 köşesinde dik açılı ikizkenar dik üçgendir. $\overline{ON} = 1$ olduğundan $\overline{ON_1} = \overline{NN_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, yani $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Şekil 2b).
- e) $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, noktası için,
 $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir (şekil 2c)
- f) N noktası $P(0,1)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle

$$\cos \frac{5\pi}{2} = 0 \text{ ve } \sin \frac{5\pi}{2} = 1 \text{ (şekil 2ç).}$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını sadece açının ikinci kenarının trigonometrik çemberle kesişim noktasının koordinatları aracılığıyla tanımladığımız için, şunu elde ediyoruz:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \text{ ve } \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

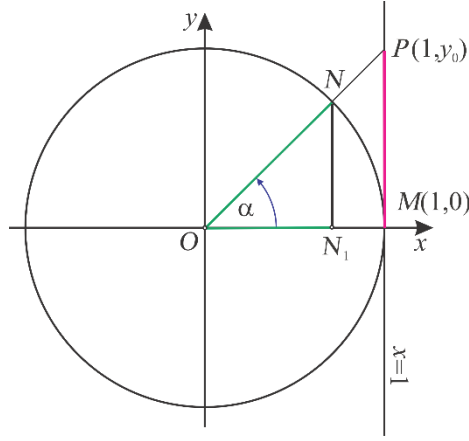
Her tam dönüşten sonra (pozitif veya negatif yönde), açının ikinci kenarının başlangıç konumuna döndüğü kolayca gözlemlenir, yani sinüs ve kosinüs değerleri tekrarlanır. Trigonometrik fonksiyonların bu özelliği periyodiklik olarak adlandırılır ve fonksiyonların aynı değere ulaştığı en küçük açı temel periyot olarak adlandırılır. Herhangi bir açının sinüs ve kosinüs fonksiyonları için bu 2π 'dir, yani bu fonksiyonların temel periyodu 2π olan periyodik fonksiyonlar olduğunu söyleriz.

$\angle MON = \alpha$, birinci kenarı OM olan herhangi bir açı olsun. N noktasının koordinatları (x_0, y_0) ise, açının **tanjant** ve **kotanjant** trigonometrik fonksiyonlarının değerleri, sırasıyla N noktasının ordinatının ve apsisinin oranı olarak tanımlanır (Şekil 1), yani

$$x_0 \neq 0 \text{ için } tg\alpha = \frac{y_0}{x_0}, \text{ ve } y_0 \neq 0 \text{ için } ctg\alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

Herhangi bir α açısı için $\tan \alpha$ trigonometrik fonksiyonunun değeri geometrik olarak şu şekilde belirlenebilir: M noktasından geçen ve y eksenine paralel olan $x = 1$ doğrusu, trigonometrik çemberin tanjantıdır ve **tanjant eksen** olarak adlandırılır. $\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, açısının ikinci kenarı, $k \in \mathbb{Z}$, tanjant eksenine kadar uzatırsak P noktasını elde ederiz (şekil 3). P noktasının koordinatları $(1, y_0)$ olduğundan, tanjant tanımına göre $\tan \alpha = y_0$.

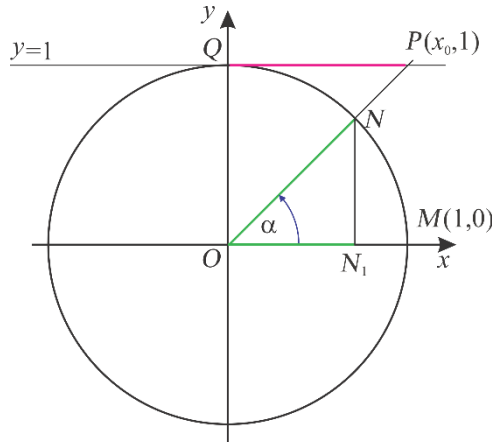
Gerçekten de, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ise ve N_1 noktası N noktasının x eksenindeki dik izdüşümü ise, $\overline{ON_1} = \cos \alpha$ ve $\overline{NN_1} = \sin \alpha$ olur. OMP ve ON_1N üçgenlerinin benzerliğinden, $\frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{NN_1}}{\overline{ON_1}}$ elde ederiz. $\overline{MP} = y_0$ ve $\overline{OM} = 1$ olduğundan, $y_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ elde ederiz.



Şekil 3

Herhangi bir α açısının kotanjant trigonometrik fonksiyonu, tanjant fonksiyonuna benzer şekilde belirlenir. $Q(0,1)$ noktasından geçen $y=1$ doğrusu x eksenine paraleldir. Trigonometrik çemberin tanjantıdır ve **kotanjant eksen**i olarak adlandırılır (Şekil 4). $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için α açısının ikinci kolunu kotanjant eksenine kadar uzatırsak, $P(x_0, 1)$ noktasını elde ederiz. O zaman kotanjant tanımına göre $\cot \alpha = x_0$ 'dır. Benzer şekilde, POQ ve ON_1N üçgenlerinin benzerliğinden,

$$x_0 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha \text{ elde ederiz.}$$



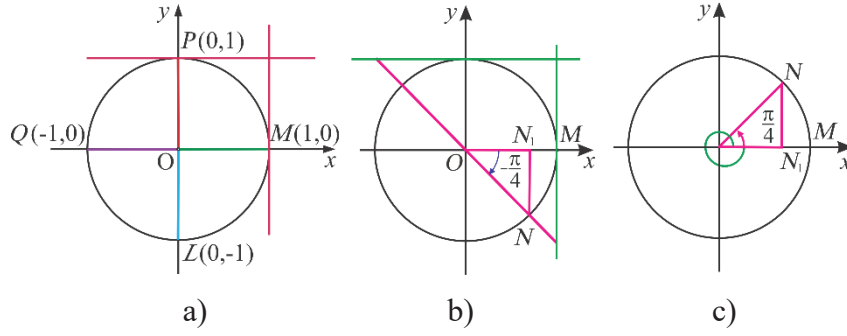
Şekil 4

Alıştırma 3. Aşağıdaki açılar için $\tan \alpha$ ve $\cot \alpha$ fonksiyonlarının değerlerini belir-
tiniz:

a) $\alpha = 0$ **b)** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ **c)** $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

ç) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$ **d)** $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ **e)** $\alpha = \pi$

Çözüm. Önce çemberin eksenlerle kesişim noktalarını işaretleyelim (şekil 5a).



Şekil 5

a) N noktası $M(1,0)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\tan 0^\circ = 0$ ve $\cot \alpha$ yoktur, çünkü açının ikinci kenarı ve kotanjant eksenine paraleldir, yani kesişmezler (Şekil 5a).

b) N noktası $P(0,1)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\tan \frac{\pi}{2}$ yoktur, çünkü açının ikinci kenarı ve tanjant eksenine paraleldir, yani kesişmezler ve $\cot \frac{\pi}{2} = 0$ (şekil 5a).

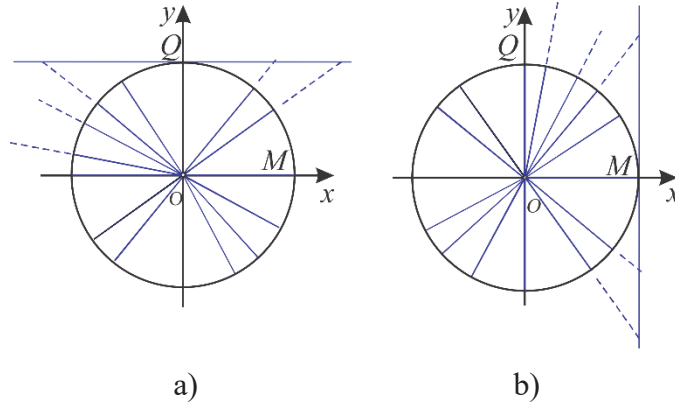
c) ONN_1 üçgeni N_1 köşesinde dik açılı ikizkenar dik üçgendir. $\overline{ON} = 1$ olduğundan $\overline{ON_1} = \overline{NN_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ yani $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ ve $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ (şekil 5b).

ç) $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ açısı birinci bölgededir ve c) şikkından $N(1,1)$ olduğu için, $\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 1 = \cot\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ (Şekil 5c).

d) N noktası $L(0,-1)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ yoktur ve $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (Şekil 5a).

e) N noktası $Q(-1,0)$ noktasıyla çakışır, bu nedenle $\tan \pi = 0$ ve $\cot \pi$ yoktur (Şekil 5a). Tanjant, ikinci kenar tanjant eksenine paralel olan tüm açılar için yoktur, yani $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ için, kotanjant ise ikinci kenar kotanjant eksenine paralel olan tüm açılar için yoktur, yani $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için.

Üçüncü dördüldeki bir açının ikinci kenarının veya uzantısının, birinci bölgedeki bir açının ikinci kenarıyla çakıştığını görebiliriz. Benzer şekilde, ikinci ve dördüncü bölgedeki açılar için de geçerlidir, bu nedenle $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ için sonucu çıkarabiliriz. Kotanjant için de benzer bir sonuç çıkarabiliriz, yani $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ için (Şekil 6a ve 6b). Buna göre, tanjant ve kotanjant fonksiyonları temel periyodu π olan periyodik fonksiyonlardır.



Şekil 6

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki açılar hangi bölgededir?

a) $\alpha = -210^\circ$ b) $\alpha = -2500^\circ$ c) $\alpha = -\frac{4\pi}{5}$

2. Aşağıdaki açılar için tüm trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulun:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ c) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ç) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$
d) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ e) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ f) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ g) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

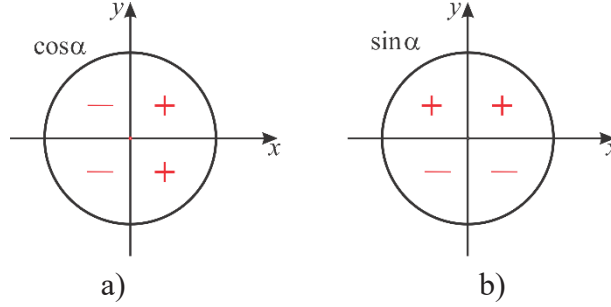
3. Alıştırma 2' deki açılar için, $-\alpha$ açısı için, tüm trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirtiniz.

3.3. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının İşareti. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının Değişimi

Birinci ve ikinci dördüldeki noktaların ikinci koordinatının pozitif işarete sahip olduğu, üçüncü ve dördüncü bölgedeki noktaların ise negatif işarete sahip olduğu bilinmektedir. Benzer şekilde, birinci ve dördüncü dördüldeki noktaların ilk koordinatı pozitif işarete sahipken, ikinci ve üçüncü dördüldeki noktaların ilk koordinatı negatif işarete sahiptir. Bu nedenle, trigonometrik fonksiyonların tanımından şu sonuca varabiliriz:

- Sinüs fonksiyonu, birinci ve ikinci bölgedeki her açı için pozitif işarete, üçüncü ve dördüncü bölgedeki her açı için negatif işarete sahiptir.
- Kosinüs fonksiyonu, birinci ve dördüncü bölgedeki her açı için pozitif işarete, ikinci ve üçüncü bölgedeki her açı için negatif işarete sahiptir (Şekil 1).

- Tanjant fonksiyonu, birinci ve üçüncü bölgedeki her açı için pozitif işarete, ikinci ve dördüncü bölgedeki her açı için negatif işarete sahiptir.
- Kotanjant fonksiyonu, birinci ve üçüncü bölgedeki her açı için pozitif işarete, ikinci ve dördüncü bölgedeki her açı için negatif işarete sahiptir.



Şekil 1

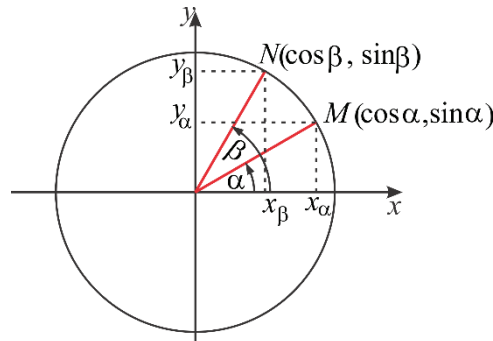
Alıştırma 1. Verilen açıların işaretini belirtiniz:

- a) $\sin 120^\circ$ b) $\cos 200^\circ$ c) $\tan 225^\circ$ ç) $\cot 310^\circ$ d) $\sin 40^\circ \cdot \cos 98^\circ$

Çözüm. a) 120° açısı ikinci bölgededir, bu nedenle $\sin 120^\circ > 0$. b) 200° açısı üçüncü bölgededir, bu nedenle $\cos 200^\circ < 0$. c) 225° açısı üçüncü bölgededir, bu nedenle $\tan 225^\circ > 0$. ç) 310° açısı dördüncü bölgededir, bu nedenle $\cot 310^\circ < 0$. d) 40° açısı birinci bölgededir, bu nedenle $\sin 40^\circ > 0$, 98° açısı ise ikinci bölgededir, bu nedenle $\cos 98^\circ < 0$, dolayısıyla $\sin 40^\circ \cdot \cos 98^\circ < 0$ dır.

Tanım 1. Herhangi $x_1, x_2 \in A$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ ise, $f(x)$ fonksiyonu A kümesinde monoton artandır. Herhangi $x_1, x_2 \in A$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ ise, $f(x)$ fonksiyonu A kümesinde monoton azalandır.

$\alpha < \beta$ ve α ve β birinci bölgeye ait iki açı olsun (şekil 2).

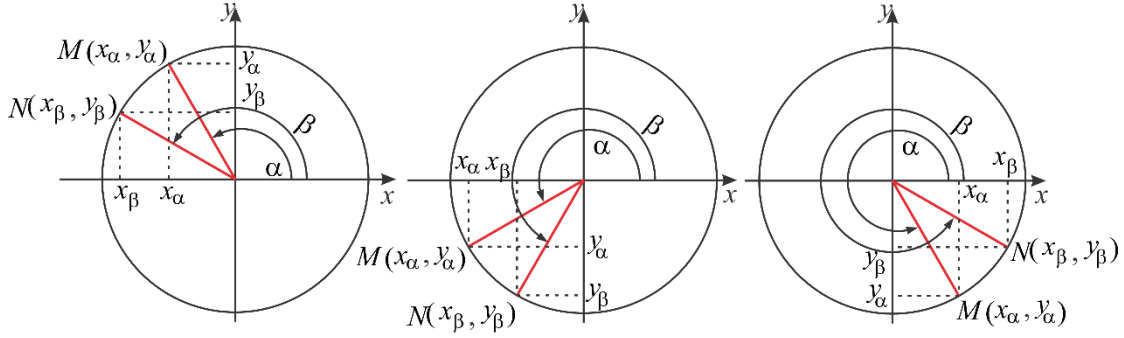


Şekil 2

Herhangi bir açının sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanımından: $\sin \alpha = x_\alpha$, $\cos \alpha = y_\alpha$, $\sin \beta = x_\beta$ ve $\cos \beta = y_\beta$ elde edilir. Uzunlukların karşılaştırılmasıyla $x_\alpha > x_\beta$ ve $y_\alpha < y_\beta$, yani $\cos \alpha > \cos \beta$ ve $\sin \alpha < \sin \beta$ olduğu kolayca

anlaşılır, yani $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında açının artmasıyla sinüs fonksiyonu monoton artan, kosinüs monoton azalan olduğunu görüyoruz. Sinüs fonksiyonunun aldığı değerler artar, yani 0'dan 1'e doğru hareket eder. Kosinüs fonksiyonunun değerleri azalır, yani 1'den 0'a doğru hareket eder.

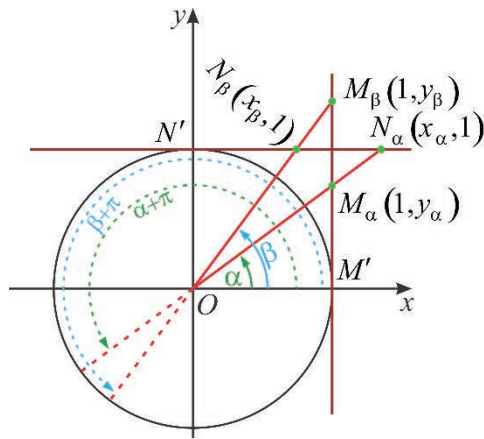
Benzer şekilde, diğer bölgelerdeki fonksiyonların monotonluğu hakkında da sonuç çıkarabiliriz (Şekil 3). Sonuç olarak, sinüs fonksiyonunun birinci ve dördüncü bölgelerde monoton arttığını, ikinci ve üçüncü bölgelerde ise monoton azaldığını söyleyebiliriz. Kosinüs fonksiyonu birinci ve ikinci bölgelerde azalan, üçüncü ve dördüncü bölgelerde ise artan olduğu görülüyor.



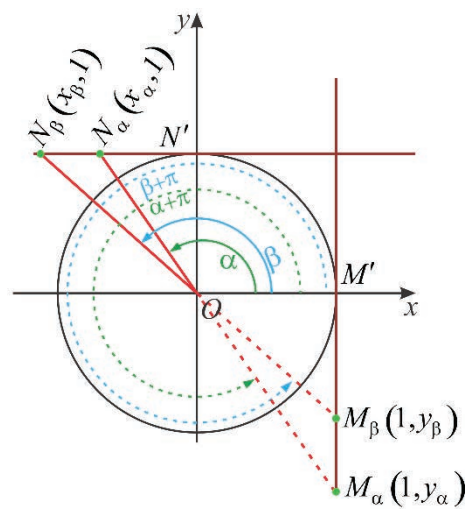
Şekil 3

$\alpha < \beta$ olmak üzere α ve β birinci bölgedeki açılar olsun (Şekil 4).

Herhangi bir açının tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonlarının tanımından, $\tan \alpha = y_\alpha$, $\cot \alpha = x_\alpha$, $\tan \beta = y_\beta$ ve $\cot \beta = x_\beta$ elde edilir. Açıkça $y_\beta > y_\alpha$ ve $x_\alpha > x_\beta$ yani tanjant fonksiyonu monoton artan, kotanjant fonksiyonu ise $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kümesinde açı arttıkça monoton azalandır. Bu sonuç, üçüncü bölgedeki açılar için de geçerli olacaktır, çünkü bu açılar için ikinci kenarın uzantısı birinci bölgedeki açılarının ikinci kenarıyla çakışır. Benzer şekilde, bu fonksiyonların ikinci veya dördüncü bölgedeki açılar için monotonluğu da belirlenir (Şekil 5).



Şekil 4



Şekil 5

İkinci bölgede tanjant fonksiyonu monoton artar, kotanjant ise monoton azalır. Bu ifade, dördüncü bölgedeki açılar için de geçerlidir, çünkü bu açılar ikinci kenarının uzantısı, ikinci bölgedeki açılar ikinci kenarıyla çakışır.

Alıştırma 2. Verilen farkın işaretini belirtiniz:

- a) $\sin 95^\circ - \sin 115^\circ$ b) $\cos 190^\circ - \cos 230^\circ$
 c) $\operatorname{tg} 312^\circ - \operatorname{tg} 345^\circ$ ç) $\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 74^\circ$.

Çözüm. a) 95° ve 115° açıları ikinci bölgededir, sinüs fonksiyonu bu bölgede monoton azaldığı için $95^\circ < 115^\circ$ olduğundan $\sin 95^\circ > \sin 115^\circ$ yani $\sin 95^\circ - \sin 115^\circ > 0$.

b) $\cos 190^\circ - \cos 230^\circ < 0$, çünkü kosinüs fonksiyonu üçüncü bölgede monoton artar, yani $190^\circ < 230^\circ$ olduğundan $\cos 190^\circ < \cos 230^\circ$.

c) $\tan 312^\circ - \tan 345^\circ < 0$, çünkü tanjant fonksiyonu dördüncü bölgede monoton artar.

d) $\cot 27^\circ - \cot 74^\circ > 0$, çünkü kotanjant fonksiyonu birinci bölgede monoton azalır.

Alıştırmalar

1. İşareti belirtiniz:

- a) $\cos 120^\circ$ b) $\sin 200^\circ$ c) $\tan 125^\circ$ ç) $\cot 130^\circ$

2. İşareti belirtiniz:

- a) $\sin 140^\circ - \cos 198^\circ$ b) $\tan 190^\circ - \cos 208^\circ$ c) $\sin 230^\circ - \cot 300^\circ$

3. Verilenlere göre, α açısı hangi bölgededir:

- a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ b) $\cos \alpha \cdot \cot \alpha < 0$

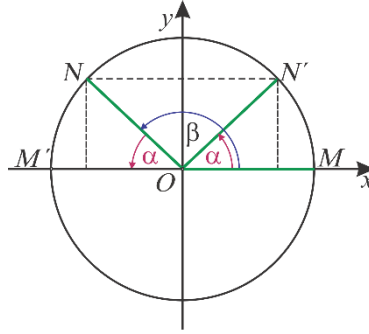
3.4. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının Dar Açının Trigonometrik Fonksiyonlarına İndirgenmesi

Trigonometrik fonksiyonların indirgenmesinde kullanılacak formüllere geçmeden önce, dik üçgende bazı dar açılarının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini hatırlayalım.

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

β ikinci bölgede bir açı olsun (Şekil 1). N noktasının koordinatlarını $(-x_0, y_0)$ olarak işaretleyeceğiz. N' noktası y eksenine göre N noktasının simetrik noktası olarak işaretleyelim. O zaman N' noktasının koordinatları (x_0, y_0) olur. NOM' açısını α ile işaretlersek, simetri nedeniyle $\alpha = \angle MON'$ olur. Buradan şunu elde ederiz:

$$\cos \beta = -x_0 = -(x_0) = -\cos \alpha \text{ ve } \sin \beta = y_0 = \sin \alpha.$$



Şekil 1

Temel trigonometrik özdeşlikleri kullanarak şunu elde ederiz:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \text{ ve } \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

β açısını $\beta = \pi - \alpha$ olarak yazabileceğimiz için şu formülleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Bu formüller yardımıyla ikinci bölgedeki bir açıyı birinci bölgedeki bir açığa indirebiliriz.

Alıştırma 1. Dar bir açığa indirgeyerek hesaplayın:

a) $\sin \frac{5\pi}{6}$ **b)** $\cos 115^\circ$

c) $\operatorname{tg} 142^\circ$ **ç)** $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$.

Çözüm. a) $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$

b) $\cos 115^\circ = \cos (180^\circ - 115^\circ) = \cos 65^\circ = -0.42262$

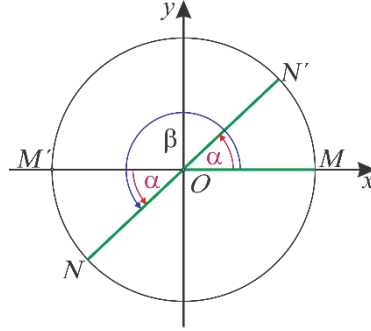
c) $\tan 142^\circ = \tan (180^\circ - 142^\circ) = \tan 38^\circ = 0.78129$

ç) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

β üçüncü bölgede bir açı olsun (Şekil 2) ve N noktasının koordinatlarını $(-x_0, y_0)$ olarak işaretleyelim. N' noktası O koordinat başlangıcına göre N noktasının simetrik noktası olarak işaretleyelim. N' noktası birinci bölgededir ve (x_0, y_0) koordinatlarına sahiptir. $\alpha = \angle NOM'$ ise, simetri nedeniyle $\alpha = \angle MON'$ elde ederiz. O halde

$$\cos \alpha = -x_0 = -(x_0) = -\cos \alpha, \quad \sin \alpha = -y_0 = -(y_0) = -\sin \alpha, \text{ dir.}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$



Şekil 2

β açısını $\beta = \pi + \alpha$ olarak yazabileceğimiz için şu formülleri elde ederiz:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$. Bu formüller yardımıyla üçüncü bölgedeki bir açıyı birinci bölgedeki bir açıya indirgeyebiliriz.

Alıştırma 2. Dar açıya indirgeyerek hesaplayınız:

a) $\sin \frac{5\pi}{4}$

b) $\cos 202^\circ$

c) $\operatorname{tg} 200^\circ$

ç) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$.

Çözüm. a) $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$

b) $\cos 202^\circ = \cos (180^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \approx -0.92718$

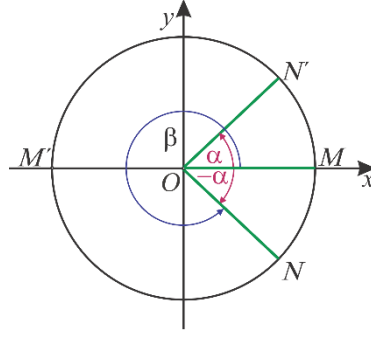
c) $\tan 200^\circ = \tan (180^\circ + 20^\circ) = \tan 20^\circ \approx 0.36997$

ç) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$

β dördüncü dördüğe ait bir açı olsun (Şekil 3). N noktasının koordinatlarının $(x_0, -y_0)$ olduğunu varsayalım. N' ile x- eksenine göre N noktasının simetrik noktası olarak işaretleyelim. N' noktası birinci dördüdedir ve (x_0, y_0) koordinatlarına sahiptir. $\alpha = \angle MON'$ ise, simetri nedeniyle $\alpha = \angle MON$ elde ederiz. Buradan şunu elde ederiz:

$$\sin \beta = -y_0 = -(y_0) = -\sin \alpha, \quad \cos \beta = x_0 = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$



Şekil 3

β açısı $\beta = 2\pi - \alpha$ olarak yazılabildiğinden, şu formülleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(2\pi - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

Bu formüller yardımıyla dördüncü bölgedeki bir açıyı birinci bölgedeki bir açıya indirgeyebiliriz.

Alıştırma 3. Dar açıya indirgeyerek hesaplayınız:

a) $\sin 288^\circ$ b) $\cos \frac{7\pi}{4}$

c) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$ ç) $\operatorname{ctg} 359^\circ$.

Çözüm. a) $\sin 288^\circ = \sin (360^\circ - 72^\circ) = -\sin 72^\circ \approx -0.95106$

b) $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

c) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$

ç) $\cot 359^\circ = \cot (360^\circ - 359^\circ) = \cot 1^\circ \approx 57.290$

α dar bir açı olsun, yani $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$. O zaman dar açıya indirgeme formülleri şunlardır:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

α ve $360^\circ - \alpha$ açılarının sinüs değerleri gözlemlendiğinde, x eksenine göre simetrik oldukları ve dolayısıyla ters değerlere sahip oldukları kolayca görülür, yani $\sin \alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$. $360^\circ - \alpha$ açısının ikinci kenarının $-\alpha$ açısının ikinci kenarıyla çakıştığı bilinmektedir, yani $\sin(-\alpha) = \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ olduğu sonucu çıkarılabilir. Benzer şekilde, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ ve $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ sonuçları çıkarılabilirken, $\cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ olur.

Her x için, $f(-x) = -f(x)$ ve $f(-x) = f(x)$ özelliklerine sahip olan fonksiyonlar ,sırasıyla tek ve çift fonksiyonlardır. Buna göre sinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları tek, kosinüs ise çift fonksiyondur.

Geçen yıl, tümler açılarının trigonometrik fonksiyonlarını öğrendiniz, yani şu formüller geçerlidir:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \text{ ve } \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

Benzer şekilde, açının $90^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$ ve $270^\circ + \alpha$ olduğu durumlarda bir trigonometrik fonksiyonu indirgeme formülleri elde edilebilir, burada α dar bir açıdır. Ayrıca, her fonksiyon kendi kofonksiyonuna dönüşür, yani sinüs kosinüse, tanjant kotanjanta ve tersi dönüşür.

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Alıştırımlar

1. Dar açıya indirgeyerek hesaplayın:

a) $\cos \frac{290}{4} \pi$ b) $\sin \frac{219}{4} \pi$.

2. Dar açıya indirgeyerek aşağıdaki değerleri bulunuz:

a) $\sin 120^\circ$ b) $\sin 225^\circ$ c) $\sin 315^\circ$ ç) $\cos 135^\circ$
d) $\cos 240^\circ$ e) $\cos(-810^\circ)$ f) $\operatorname{tg} 150^\circ$ g) $\operatorname{tg} 330^\circ$
ğ) $\operatorname{tg} 225^\circ$ h) $\operatorname{ctg} 210^\circ$ ı) $\operatorname{ctg} 300^\circ$ i) $\operatorname{ctg} 570^\circ$.

3. İfadeleri sadeleştiriniz:

a) $\frac{\sin 750^\circ \cdot \cos 390^\circ \cdot \operatorname{tg} 1140^\circ}{\operatorname{ctg} 405^\circ \cdot \sin 1860^\circ \cdot \cos 780^\circ}$ b) $\frac{\cos \frac{17\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{17\pi}{4}}{\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{4} \cdot \sin \frac{8\pi}{3}}$.

4. Verilen ifadelerin değerlerini belirtiniz:

a) $\sin 420^\circ \cdot \operatorname{tg} 390^\circ + \cos 300^\circ \cdot \operatorname{tg} 510^\circ$
b) $\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} (-150^\circ)$
c) $\sin 240^\circ \cdot \cos(-150^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 120^\circ$
ç) $\operatorname{tg} \frac{18\pi}{2} - \sin \frac{8\pi}{3} \cdot \sin \frac{15\pi}{2}$.

3.5. Trigonometrik İfadelerin Sadeleştirilmesi

Geçen yıl, dik açılı bir üçgende her dar açı için doğru olan ve temel trigonometrik özdeşlikler olarak bilinen bazı eşitliklerle tanıştık, yani $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ve $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

Eğer $N(x_0, y_0)$ noktası, α açısının ikinci kenarının çemberle kesişimi olarak elde edilen trigonometrik birim çember üzerindeki herhangi bir nokta ise, Pisagor teoreminden $x_0^2 + y_0^2 = 1$ elde edilir. Trigonometrik fonksiyonların sinüs ve kosinüs tanımlarından $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ elde edilir.

Tanjant fonksiyonunun tanımından $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0}$ gerekir, yani $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ elde edilir.

Son iki eşitliğin çarpımından

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \text{ için, } \alpha \neq (k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ elde edilir.}$$

Örnek 1. Eğer $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ve $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ise, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ ve $\cot \alpha$ değerlerini bulunuz.

Çözüm. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ olduğundan, $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ elde edilir. α açısı dördüncü dördüldü olduğundan, sinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları negatif işaretlidir, yani:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5},$$

elde edilir. Buradan $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ elde edilir. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ olduğundan,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ yani } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4} \text{ elde edilir.}$$

Örnek 2. Eğer $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$ ve $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ise, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\cot \alpha$ değerlerini bulunuz.

Çözüm. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ olduğundan, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$ elde edilir. Temel trigonometrik özdeşlik

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ifadesini $\cos^2 \alpha$ ile bölersek, şunu elde ederiz:

$$1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Buna göre, α açısı üçüncü dördüle ait olduğuna göre $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{1}{\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}$ elde edilir. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eşitliğinde değiştirmekle

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = -\frac{24}{25}.$$

elde edilir.

Not. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eşitliğini $\sin^2 \alpha$ ile bölersek

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

elde edilir.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \text{ ve } \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \text{ eşitliklerinden şu bağıntılar elde edilir:}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \text{ ve } \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Alıştırma 1. Verilen ifadeleri sadeleştiriniz:

$$\text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \quad \text{b) } (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$$

Çözüm.

$$\text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{b) } (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 =$$

$$= \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 4\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 4.$$

Alıştırma 2. Verilen özdeşliği ispatlayınız:

$$\text{a) } \sin(2\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\text{b) } 1 - \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha) \right)^2 = -2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Çözüm. Eşitliğin sol tarafını dönüştürmekle şunu elde ediyoruz:

$$\text{a) } \sin(2\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) =$$

$$= -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\operatorname{tg} \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\text{b) } 1 - \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha) \right)^2 = 1 - (-\cos \alpha - \sin \alpha)^2 =$$

$$= 1 - (1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha) = -2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Alıştırımlar

1. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olsun. Aşağıdaki değerleri bulunuz:
 - a) $\sin \alpha$, **eğer** $\cos \alpha = -0.6$ ise
 - b) $\sin \alpha$, **eğer** $\cot \alpha = -2$ ise.
2. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olsun. Aşağıdaki değerleri bulunuz:
 - a) $\cos \alpha$, **eğer** $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ise
 - b) $\tan \alpha$, **eğer** $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$ ise.
3. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz:
 - a) $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
 - b) $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)$
 - c) $1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
4. Aşağıdakiler verilmiş olduğuna göre, diğer üç trigonometrik fonksiyonun değerlerini bulun:
 - a) $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ ve $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
 - b) $\cot \alpha = 1$ ve $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 - c) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ve $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
5. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - \pi) - \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 2\pi)$ ifadesini sadeleştiriniz.

3.6. Temel Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizmeye başlamadan önce, fonksiyonları daha önce dereceler veya radyanlar cinsinden ifade ettiğimizi hatırlayalım.

Aşağıda, trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizecek ve bu fonksiyonların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

 $y = \sin x$ Trigonometrik Fonksiyonunun Grafiği

Trigonometrik birim çember yardımıyla öğrendiğimiz $y = \sin x$ trigonometrik fonksiyonunun temel özelliklerini kullanarak grafiğini çizeceğiz.

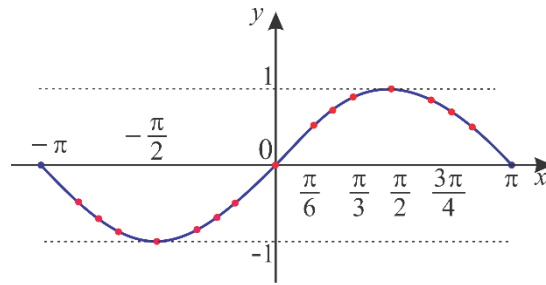
- $y = \sin x$ fonksiyonu her reel sayı x için tanımlıdır. Bu, y eksenine paralel her doğrunun fonksiyonun grafiğini tam olarak bir noktada kestiği anlamına gelir.
- $y = \sin x$ fonksiyonu sınırlıdır, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \sin x \leq 1$ olur. Bu, grafiğinin $y = -1$ ve $y = 1$ paralel doğruları arasında olduğu anlamına gelir.
- $y = \sin x$ fonksiyonu temel periyodu 2π olan periyodiktir. Bu, grafiğini uzunluğu 2π olan bir aralıkta, örneğin $[-\pi, \pi]$ aralığında çizmenin yeterli olduğu anlamına gelir. Fonksiyonun grafiğinin geri kalanı, grafiğin $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kadar x - eksenini boyunca ötelemekle elde edilir.

- Fonksiyon $y = \sin x$ tektir, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\sin(-x) = -\sin x$ geçerlidir. Bu, grafiğinin orijine göre simetrik olduğu anlamına gelir, yani fonksiyon grafiğinin $[-\pi, 0]$ aralığındaki kısmı, fonksiyon grafiğinin $[0, \pi]$ aralığındaki kısmının orijine göre simetriğidir.
- Fonksiyon $y = \sin x$ 'in $x \in [0, \pi]$ aralığındaki sıfırları $x = 0$ ve $x = \pi$ 'dir. Bu, fonksiyon grafiğinin $x \in [0, \pi]$ için x-eksenini $(0, 0)$ ve $(\pi, 0)$ noktalarında kestiği anlamına gelir.
- Fonksiyon $y = \sin x$, $0 < x < \pi$ için pozitiftir. Bu, fonksiyon grafiğinin $x \in (0, \pi)$ için x-ekseninin üzerinde olduğu anlamına gelir.
- $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için $\sin x$ monoton artandır ve $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için monoton azalır. $[0, \pi]$ aralığındaki maksimum değeri $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$[0, \pi]$ aralığında sinüs fonksiyonunun grafiğini çizmek için bu aralıktan birkaç açı seçeriz ve ardından o açıların büyüklüğüne karşılık gelen fonksiyonun değerini belirleriz. Sıralı nokta çiftlerini bir dik koordinat sistemine xOy düzleminde yerleştiririz.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

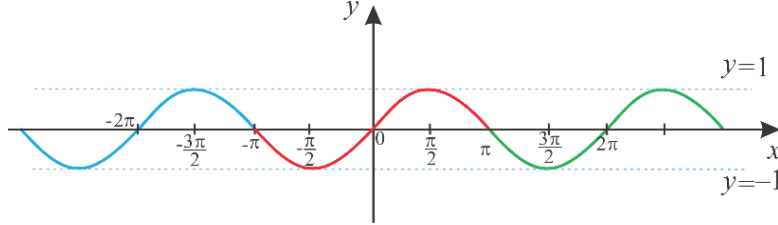
“ $y = \sin x$ fonksiyonunun tek olduğunu göz önünde bulundurarak, $[-\pi, 0]$ aralığındaki grafiğin karşılık gelen noktalarına hemen sahibiz (Şekil 1).



Şekil 1

$y = \sin x$ fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında artandır ve $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ aralığında azalandır. Fonksiyon tek olduğuna göre, $[-\pi, 0]$ aralığındaki grafik, $[0, \pi]$ aralığındaki grafiğin orijine göre simetriğidir. Buna göre, $y = \sin x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki grafiği Şekil 1'deki gibidir.

$y = \sin x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu ve periyodunun 2π olduğunu göz önünde bulundurursak, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği, $x \in [-\pi, \pi]$ için elde edilen grafiğin $x \in (-\infty, +\infty)$ aralığında, x - eksenini boyunca $2k\pi$ kadar ötelenmesiyle elde edilir. Böylece, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği, **sinüsoid** olarak adlandırılan sonsuz bir eğri elde ederiz (Şekil 2).



Şekil 2

$y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinden onun temel özelliklerini okuyabiliriz:

- Fonksiyon tüm reel sayılar üzerinde tanımlıdır.
- Fonksiyon sınırlıdır, yani her $x \in \mathbb{R}$ için, $-1 \leq \sin x \leq 1$ dir.
- Fonksiyonun temel periyodu 2π olan periyodiktir.
- Fonksiyon $y = \sin x$ tektir, yani her $x \in \mathbb{R}$ için, $\sin(-x) = -\sin x$ tir.
- Fonksiyonun sıfırları $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ noktalarındadır.
- Fonksiyonun maksimum değeri, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için, $y_{\min} = -1$ dir.
- Fonksiyonun minimum değeri, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için, $y_{\min} = 1$ dir.
- Fonksiyon $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ için monoton artandır ve $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ için monoton azalandır.
- Fonksiyon $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ için pozitif ve $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ için fonksiyon negatiftir.

$y = \cos x$ Trigonometrik Fonksiyonunun Grafiği

Benzer şekilde, $y = \cos x$ trigonometrik fonksiyonunun grafiğini çizmek için daha önce öğrendiğimiz özellikleri hatırlayacağız.

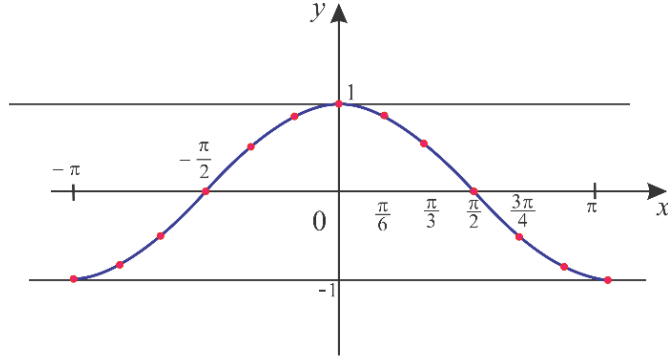
- $y = \cos x$ fonksiyonu her reel sayı x için tanımlıdır. Bu, y - eksenine paralel her doğrunun fonksiyon grafiğini tam olarak bir noktada kestiği anlamına gelir.
- $y = \cos x$ fonksiyonu sınırlıdır, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ 'dir. Bu, grafiğinin $y = -1$ ve $y = 1$ paralel doğruları arasında olduğu anlamına gelir.

- $y = \cos x$ fonksiyonu, temel periyodu 2π olan periyodiktir. Bu, grafiğini sadece 2π uzunluğunda bir aralıkta, örneğin $[-\pi, \pi]$ aralığında çizmenin yeterli olduğu anlamına gelir. Fonksiyonun grafiğinin geri kalanı, $[-\pi, \pi]$ aralığında elde edilen grafiğin x - eksenini boyunca $2k\pi$ uzunluğundaki vektörlerle kaydırılmasıyla elde edilir, $k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cos x$ fonksiyonu çifttir, yani her x için $\cos(-x) = \cos x$ 'tir. Bu, grafiğinin y eksenine göre simetrik olduğu anlamına gelir, yani fonksiyon grafiğinin $[-\pi, 0]$ aralığındaki kısmı, fonksiyon grafiğinin $[0, \pi]$ aralığındaki kısmının y eksenine göre simetriğidir.
- $y = \cos x$ fonksiyonu $x \in [0, \pi]$ için $x = \frac{\pi}{2}$ sıfırdır. Bu, fonksiyon grafiğinin $x \in [0, \pi]$ için x eksenini $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktasında kestiği anlamına gelir.
- $y = \cos x$ fonksiyonu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için pozitifdir ve $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için negatiftir. Bu, fonksiyon grafiğinin $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için x ekseninin üzerinde, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için ise x ekseninin altında olduğu anlamına gelir.
- Fonksiyon $x \in [0, \pi]$ için azalır. $[0, \pi]$ aralığındaki maksimum değeri $\cos 0 = 1$ iken, $[0, \pi]$ aralığındaki minimum değeri $\cos \pi = -1$ 'dir.

x Oy dik koordinat sisteminde, $y = \cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki değerleri için aşağıdaki tabloda verilen noktaları çizeceğiz.

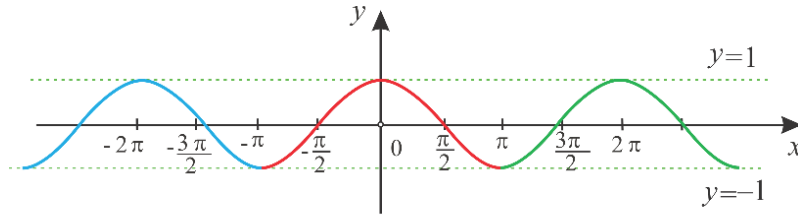
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$y = \cos x$ fonksiyonunun çift olduğunu göz önünde bulundurarak, $[-\pi, 0]$ aralığındaki grafiğin karşılık gelen noktalarını da elde ederiz (şekil 6). $y = \cos x$ fonksiyonu çift olduğuna göre, $[-\pi, 0]$ aralığındaki grafiğinin, $[0, \pi]$ aralığındaki fonksiyon grafiğinin y eksenine göre simetriği olduğu sonucu çıkar (şekil 3).



Şekil 3

$y = \cos x$ fonksiyonunun grafiği, $x \in (-\infty, +\infty)$ için, $[-\pi, \pi]$ aralığında elde edilen grafiğin x eksenini boyunca $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kadar ötelenmesiyle elde edilir. Bu sonsuz bir eğridir ve **kosinüsoid** olarak adlandırılır (şekil 4).



Şekil 4

$y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğinden temel özelliklerini okuyabiliriz:

- Fonksiyon tüm reel doğru üzerinde tanımlıdır.
- Fonksiyon sınırlıdır, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ 'dir.
- Fonksiyonun temel periyodu 2π 'dir.
- $y = \cos x$ fonksiyonu çifttir, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\cos(-x) = \cos x$ 'tir.
- Fonksiyonun sıfırları $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ noktalarındadır.
- Fonksiyonun maksimum değeri $y_{\max} = 1$, $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için ve minimum değeri $y_{\min} = -1$, $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için.
- Fonksiyon $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ aralıklarında monoton artandır ve $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ aralığında monoton azalandır.
- Fonksiyon $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, için pozitif ve $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ için negatiftir.

$y = \text{tg} x$ Trigonometrik Fonksiyonunun Grafiği

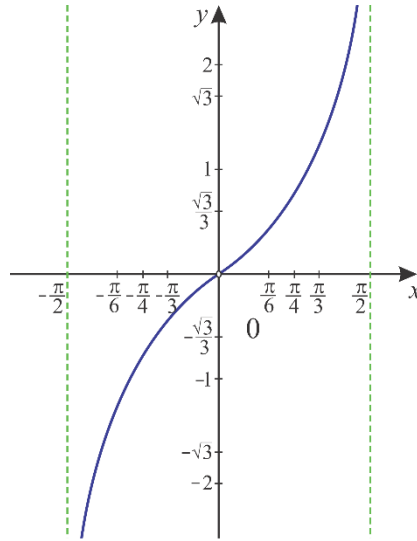
Trigonometrik çemberi ve tanjant eksenini kullanarak, $y = \text{tg} x$ fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki bazı özelliklerini yazabiliriz.

- Fonksiyon, her $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için tanımlıdır. Bu ise, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ doğruları fonksiyon grafiğini kesmediği anlamına gelir.
- Fonksiyon sınırlı değildir, yani tüm reel değerleri alır. x değişkeninin değerleri $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ değerlerine yeterince yakınsa, fonksiyonun karşılık gelen değerleri mutlak değer olarak sonsuz büyüktür. Daha kesin olarak, x değeri $-\frac{\pi}{2}$ 'ye yaklaştığında, fonksiyon sonsuz büyük negatif değerler alır ve x değeri $\frac{\pi}{2}$ 'ye yaklaştığında, fonksiyon sonsuz büyük pozitif değerler alır. Fonksiyonun grafiği için bu, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ doğrularına sınırsızca yaklaştığı anlamına gelir.
- Fonksiyonun temel periyodu π 'dir. Bu nedenle, fonksiyonun grafiğini uzunluğu π olan herhangi bir aralıkta, örneğin $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çizmek yeterlidir.
- Fonksiyon tek fonksiyondur, yani grafiği koordinat başlangıcına göre simetriktir. Bu, fonksiyonun grafiğini $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çizmenin yeterli olduğu anlamına gelir.
- $y = \text{tg} x$ fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $x = 0$ için sıfırı vardır. Bu, fonksiyon grafiğinin $(0,0)$ noktasında x eksenini kestiği anlamına gelir.
- $y = \text{tg} x$ fonksiyonu $0 < x < \frac{\pi}{2}$, için pozitifdir ve $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ için negatiftir.
- Bu, fonksiyonun grafiğinin $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için x ekseninin üzerinde, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ için ise x ekseninin altında olduğu anlamına gelir.
- $y = \text{tg} x$ fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında monoton artandır.

Dik koordinat sisteminde, aşağıdaki tabloda verilen $y = \text{tg } x$ fonksiyonunun $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki değerleri için elde edilen noktaları işaretleyelim.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{tg } x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	–

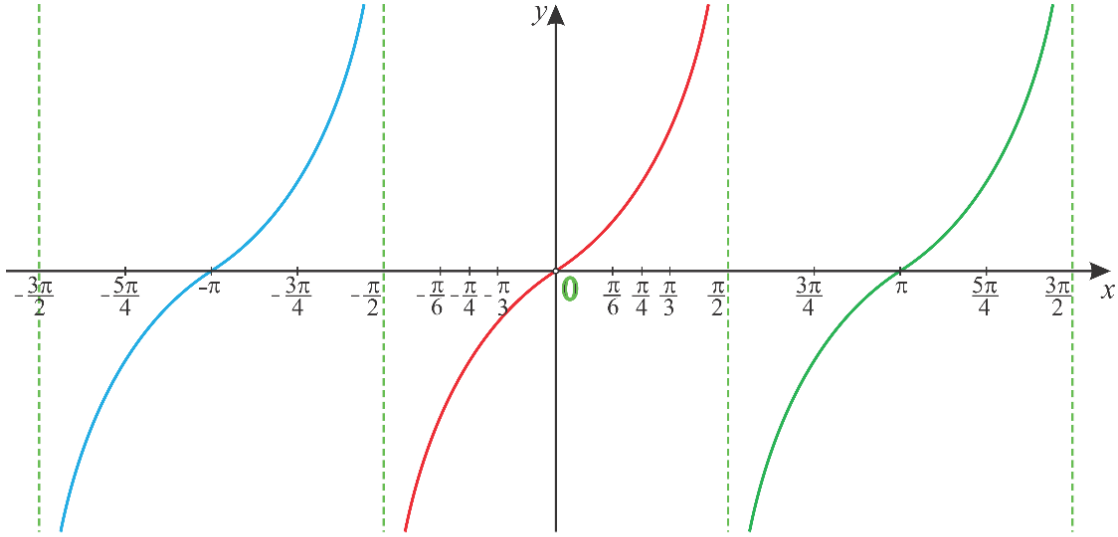
$y = \text{tg } x$ fonksiyonunun tek bir fonksiyon olduğunu göz önünde bulundurarak, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ aralığındaki fonksiyon grafiğinin karşılık gelen noktalarını da elde ederiz, yani $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ aralığındaki fonksiyon grafiği $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki grafikte koordinat başlangıcına göre simetrik (şekil 5).



Şekil 5

x değeri $-\frac{\pi}{2}$ 'ye yaklaştığında, grafik alt taraftan $x = -\frac{\pi}{2}$ dikey doğrusuna yaklaşır. Bu doğruya $y = \text{tg } x$ fonksiyonunun **asimptotu** denir. Benzer şekilde, x değerleri $\frac{\pi}{2}$ 'ye çok yakın olduğunda, grafik aynı zamanda bir asimptot olan $x = \frac{\pi}{2}$ dikey doğrusuna yaklaşır.

$y = \text{tg } x$ fonksiyonunun grafiği, $y = \text{tg } x$ fonksiyonunun $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki grafiğinin x - eksenı boyunca $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kadar ötelenmesiyle elde edilir (şekil 5). $\text{tg } x$ fonksiyonunun grafiğine **tanjantoit** denir (şekil 6).



Şekil 6

$y = \text{tg } x$ fonksiyonunun grafiğinden temel özelliklerini okuyabiliriz:

- Fonksiyon, her $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için tanımlıdır, yani tanım aralığı $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesidir.
- $\text{tg } x$ fonksiyonu sınırsızdır. x değişkeninin değerleri $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ değerlerine yeterince yakınsa, fonksiyonun karşılık gelen değerleri mutlak değerce sonsuz büyüktür.
- $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ doğruları fonksiyonun dikey asimptotlarıdır.
- $y = \text{tg } x$ fonksiyonu, temel periyodu π olan periyodik bir fonksiyondur.
- $y = \text{tg } x$ fonksiyonu tek fonksiyondur.
- Fonksiyonun sıfırları $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 'dir.
- $y = \text{tg } x$ fonksiyonu, her $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$ aralığında monoton artandır.
- Fonksiyon, her $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ aralığında pozitif ve her $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$ aralığında negatiftir.

$y = \text{ctg } x$ Trigonometrik Fonksiyonunun Grafiği

Trigonometrik çemberi ve kotanjant eksenini kullanarak, $y = \text{ctg } x$ fonksiyonunun bazı özelliklerini yazacağız.

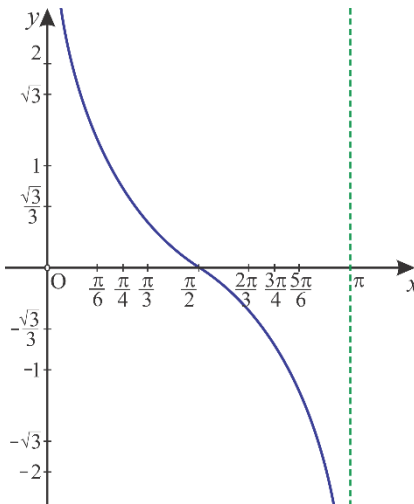
- Fonksiyon, her $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için tanımlıdır. Bu, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ doğrularının fonksiyon grafiğini kesmediği anlamına gelir.
- Fonksiyon sınırlı değildir, yani tüm reel değerleri alır. x değişkeninin değerleri $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ değerlerine yeterince yakınsa, fonksiyonun karşılık gelen değerleri

mutlak değerce sonsuz büyüktür. Daha kesin olarak, x değişkeni 0 'a yaklaştığında, fonksiyon sonsuz çok büyük pozitif değerler alır ve x değikenini π 'ye yaklaştığında, fonksiyon sonsuz derecede büyük negatif değerler alır. Bu, fonksiyon grafiğinin $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ doğrularına sınırsızca yaklaştığı anlamına gelir.

- Fonksiyonun temel periyodu π 'dir. Bu nedenle, fonksiyonun grafiğini uzunluğu π olan herhangi bir aralıkta, örneğin $(0, \pi)$ aralığında çizmek yeterlidir.
- Fonksiyon tektir, bu da grafiğinin koordinat başlangıcına göre simetrik olduğu anlamına gelir.
- $y = \text{ctg } x$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığında $x = \frac{\pi}{2}$ için sıfırı vardır. Bu, fonksiyon grafiğinin $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktasında x eksenini kestiği anlamına gelir.
- $y = \text{ctg } x$, fonksiyonu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için pozitifdir ve $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için negatiftir. Bu, fonksiyon grafiğinin $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için x ekseninin üzerinde, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için ise x ekseninin altında olduğu anlamına gelir.
- $y = \text{ctg } x$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında azalandır.

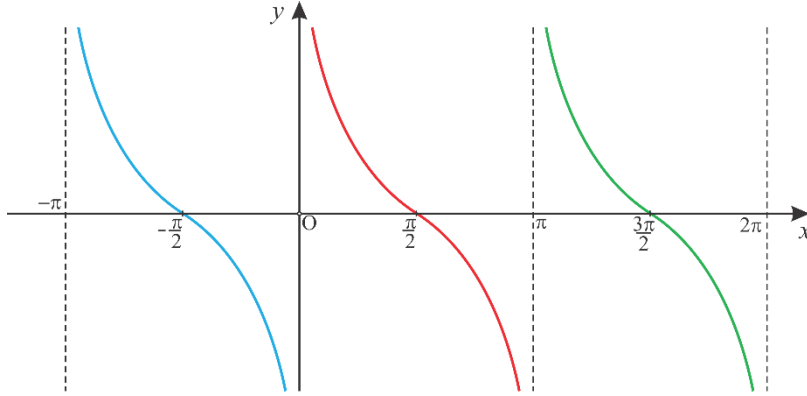
Dik koordinat sisteminde, aşağıdaki tabloda verilen $y = \text{ctg } x$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki değerleri için elde edilen noktaları işaretleyelim (şekil 7).

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\text{ctg } x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$



Şekil 7

$\text{ctg} x$ fonksiyonu, temel periyodu π olan periyodik bir fonksiyon olduğundan, grafiği sonsuz sayıda eğriden oluşur (Şekil 7'deki gibi), bunlar $y = \text{ctg} x$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki grafiğinin x eksenini boyunca $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ kadar ötelenmesiyle elde edilir (Şekil 8).



Şekil 8

$y = \text{ctg} x$ fonksiyonunun grafiğinden temel özelliklerini okuyabiliriz:

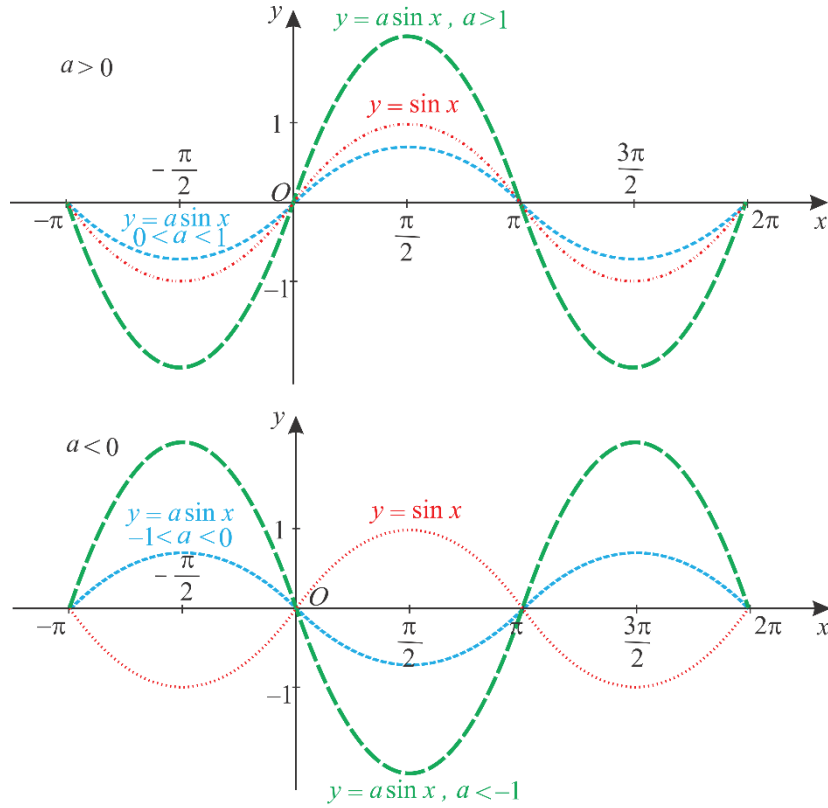
- Fonksiyon, her $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ için tanımlıdır, yani tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ kümesidir.
- $y = \text{ctg} x$ fonksiyonu sınırsızdır. x değişkeninin değerleri $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ değerlerine yeterince yakınsa, fonksiyonun karşılık gelen değerleri mutlak değer olarak sonsuz büyüktür. Doğrular $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, fonksiyonun dikey asimptotlarıdır.
- $y = \text{ctg} x$ fonksiyonu, temel periyodu π olan periyodik bir fonksiyondur.
- $y = \text{ctg} x$ fonksiyonu tek fonksiyondur.
- Fonksiyonun sıfırları $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ dir.
- Fonksiyon, her $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ aralığında pozitifdir ve her $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ aralığında negatiftir.
- Fonksiyon $\text{ctg} x$, her $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ aralığında monoton azalandır.

3.7. Trigonometrik Fonksiyonların Grafiğini Çizmek

$y = a \sin x$ **Fonksiyonunun Grafiği**

$y = a \sin x$ fonksiyonunun grafiğini, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği yardımıyla kolayca çizebiliriz.

Belli bir x değişken değeri için, $y = a \sin x$ fonksiyonunun değerleri, aynı x değeri için $y = \sin x$ fonksiyonunun değerlerinin a sayısı ile çarpılmasıyla elde edilir. $a > 0$ ve $a < 0$ için olası durumlar şekil 1’de verilmiştir.

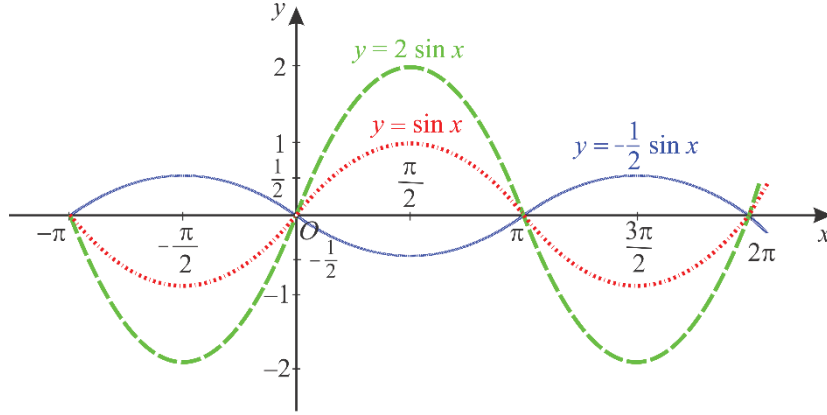


Şekil 1

$|a|$ sayısı, $y = a \sin x$ fonksiyonun **genliğidir** (amplitüdü) ve grafiğin noktalarının apsis ekseninden en büyük sapmasını verir.

$y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği $y = -1$ ve $y = 1$ doğruları arasındadır, yani $-1 \leq \sin x \leq 1$ 'dir, $y = a \sin x$ fonksiyonu için ise $-|a| \leq a \sin x \leq |a|$ olur, yani grafiği $y = |a|$ ve $y = -|a|$ doğruları arasındadır.

Örnek 1. $y = 2 \sin x$ fonksiyonunun grafiği, $y = \sin x$ grafiğinin ordinatlarının 2 ile çarpılmasıyla elde edilir. Benzer şekilde, ordinatlar $-\frac{1}{2}$ ile çarpıldığında $y = -\frac{1}{2} \sin x$ grafiği elde edilir (şekil 2).



Şekil 2

$y = \sin bx$ Fonksiyonunun Grafiği

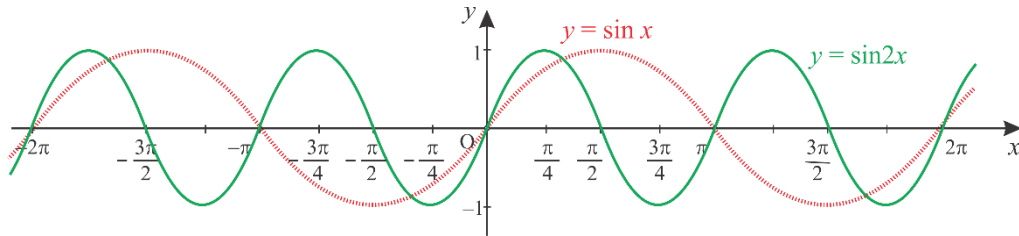
b sabiti, x değişkenini çarptığına göre, $y = \sin bx$ fonksiyonunun periyodunda bir değişiklik beklenmelidir. Bu nedenle, $y = \sin bx$ fonksiyonunun periyodu için şunu elde ederiz:

$$\sin bx = \sin(bx + 2k\pi) = \sin b \left(x + \frac{2k\pi}{b} \right).$$

Demek ki, $\frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$ sayıları $y = \sin bx$ fonksiyonunun periyotlarıdır ve temel periyodu $\frac{2\pi}{b}$ 'dir. Bu nedenle, fonksiyon grafiğinin $\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ aralığındaki kısmını çizmek ve ardından x eksenini boyunca $k \cdot \frac{2\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$ uzunluğunda öteleme yaparak $y = \sin bx$ fonksiyonunun grafiğinin elde edilmesi için yeterlidir.

$\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ aralığındaki grafik bölümüne **dalga** denir ve $\frac{2\pi}{b}$ sayısına da **dalganın uzunluğu** denir. Dalga uzunluğunun tersi olan $\frac{b}{2\pi}$ sayısına ise **dalga sıklığı** (frekans) denir.

Örnek 2. Şekil 3'te, $y = \sin 2x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde elde edilerek gösterilmektedir:

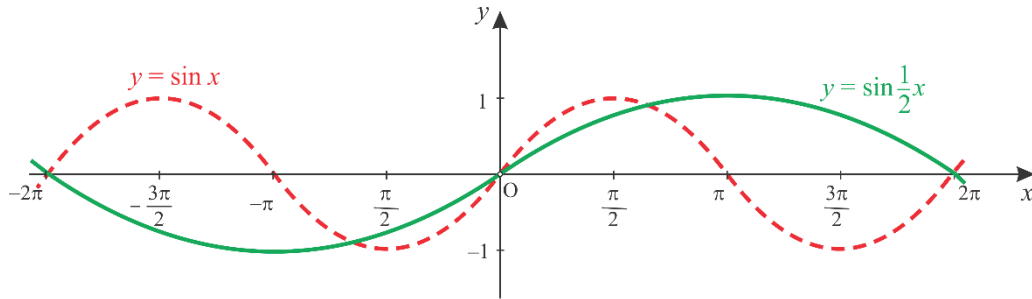


Şekil 3

- Fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 'dir, yani fonksiyonun grafiği iki kat daha kısa bir dalga boyuna sahip bir sinüsoiddir. Bu nedenle, fonksiyonun grafiğini $[0, \pi]$ aralığında temsil etmek yeterlidir;
- Fonksiyonun sıfırları, $\sin 2x = 0$ denkleminde elde edilir, yani $2x = k\pi$, buradan $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ bulunur. Demek ki, $[0, \pi]$ aralığındaki sıfırları $x = 0$, $x = \pi/2$ ve $x = \pi$ olduğu anlamına gelir.
- Fonksiyonun maksimum değeri, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ eşitliğinden elde edilir. Denklemi çözerek $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ bulunur. Demek ki, $[0, \pi]$ aralığında $x_{\max} = \frac{\pi}{4}$ maksimum olduğu anlamına gelir;
- Fonksiyonun minimum değeri, $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, yani $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ bulunur. Buna göre $[0, \pi]$ aralığında $x_{\min} = \frac{3\pi}{4}$ elde edilir.

Örnek 3. Şekil 4'te $y = \sin \frac{1}{2}x$ fonksiyonunun grafiği gösterilmektedir.

Temel periyodu $T = \frac{2\pi}{b} = 4\pi$ 'dir.



Şekil 4

Şekil 3 ve 4'ten, $|b| > 1$ ise, $y = \sin bx$ fonksiyonunun temel periyodunun $y = \sin x$ fonksiyonunun temel periyodundan daha küçük olduğu, $b < 1$ ise daha büyük olduğu görülebilir. Ayrıca, $b < 0$ ise, değişkenin işareti değiştiği için fonksiyonun işareti de değişir.

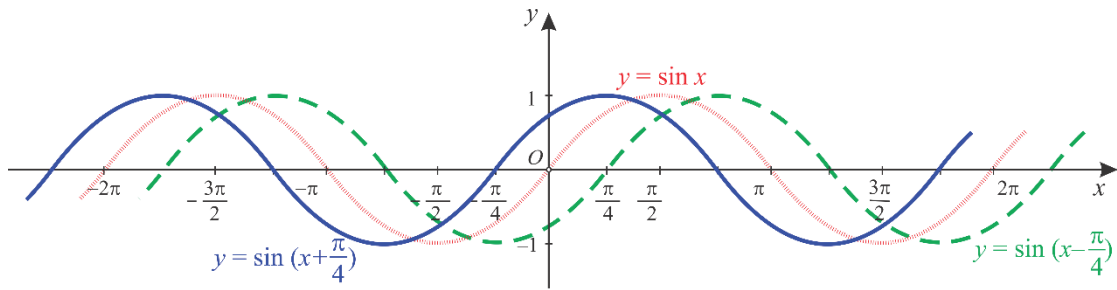
$y = \sin(x + c)$ **Fonksiyonunun Grafiği**

c sıfırdan farklı herhangi bir reel sayı olduğunda, $y = \sin(x + c)$ fonksiyonunun grafiği, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği yardımıyla çizilebilir. Her x için $\sin((x + c) - c) = \sin x$ olduğunu bildiğimizden, $y = \sin(x + c)$ fonksiyonunun grafiğini, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğini x -ekseni boyunca $|c|$ kadar kaydırarak elde edebiliriz. Eğer $c > 0$ ise,

öteleme sola doğru $|c|$ kadar, $c < 0$ ise sağa doğru $|c|$ kadar ötelenir. Yani, $y = \sin(x + c)$ fonksiyonunun grafiği argümanındaki $x + c$ ifadesinin sıfır olduğu, yani $x + c = 0$ veya $x = -c$ olduğu x değişkeninin değeri için kaydırılarak ötelenir.

c sabitine **faz sabiti** denir. Bu nedenle, $y = \sin x$ ve $y = \sin(x + c)$ fonksiyonlarının fazda farklı olduğunu, yani $y = \sin(x + c)$ fonksiyonunun $c > 0$ veya $c < 0$ olmasına bağlı olarak $y = \sin x$ fonksiyonuna göre fazda ilerlediğini (veya geride kaldığını) söyleriz.

Örnek 4. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonunun grafiği, $c = \frac{\pi}{4} > 0$ olduğu için sola doğru $\frac{\pi}{4}$ kadar ötelenerek elde edilir. Benzer şekilde, $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonunun grafiği, $c = -\frac{\pi}{4} < 0$ olduğu için sağa doğru $\frac{\pi}{4}$ kadar ötelenerek elde edilir (şekil 5).



Şekil 5

$y = a \sin(bx + c)$ **Fonksiyonunun Grafiği**

$y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $y = \sin x$, $y = a \sin x$, $y = \sin bx$ ve $y = \sin(x + c)$ fonksiyonlarının grafiklerini kullanacağız.

$y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun genliği $|a|$ sayısıdır, yani $-|a| \leq a \sin(bx + c) \leq |a|$. Bu ise, $y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiğinin $y = a$ ve $y = -a$ doğruları arasında olduğu anlamına gelir.

$y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$ 'dir, çünkü

$$a \sin(bx + c) = a \sin(bx + c + 2k\pi) = a \sin\left(b\left(x + \frac{2k\pi}{b}\right) + c\right).$$

$bx + c = 0$ denkleminde $x = -\frac{c}{b}$ elde ederiz, bu nedenle $y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiği, $y = a \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin x - eksenini boyunca $-\frac{c}{b}$ kadar ötelenmesiyle elde edilir. Eğer $\frac{c}{b} > 0$ ise, sola doğru $-\frac{c}{b}$ kadar, eğer $\frac{c}{b} < 0$ ise sağa doğru

$-\frac{c}{b}$ kadar ötelenir. Gerekli olan kalan veriler, fonksiyonun sıfırları, maksimum ve minimum değerleri daha önce olduğu gibi belirlenir.

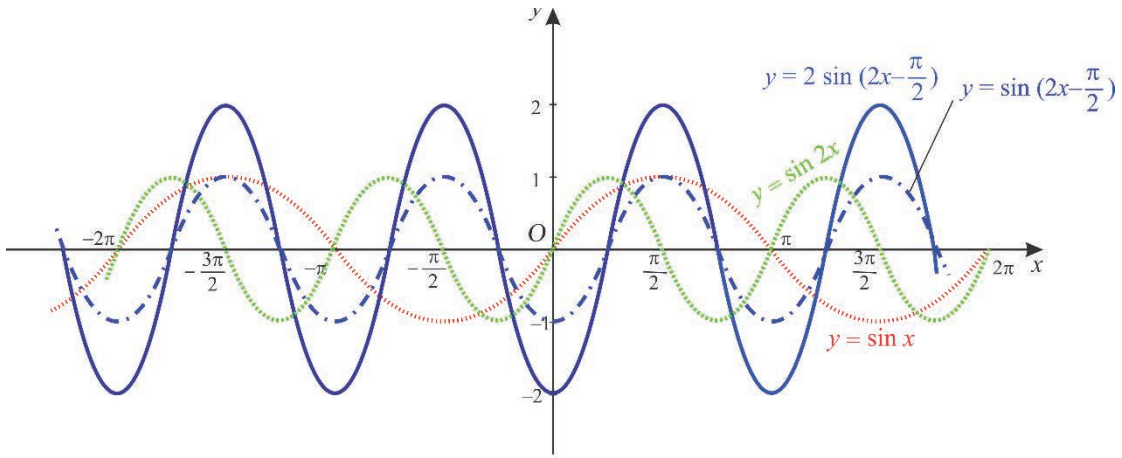
Şimdi $y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz. Bunu adım adım 4 aşamada yapacağız:

- 1. adım:** $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizeriz,
- 2. adım:** $y = \sin bx$ fonksiyonunun grafiğini çizeriz,
- 3. adım:** $y = \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiğini çizeriz,
- 4. adım:** $y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiğini çizeriz.

Alıştırma 1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

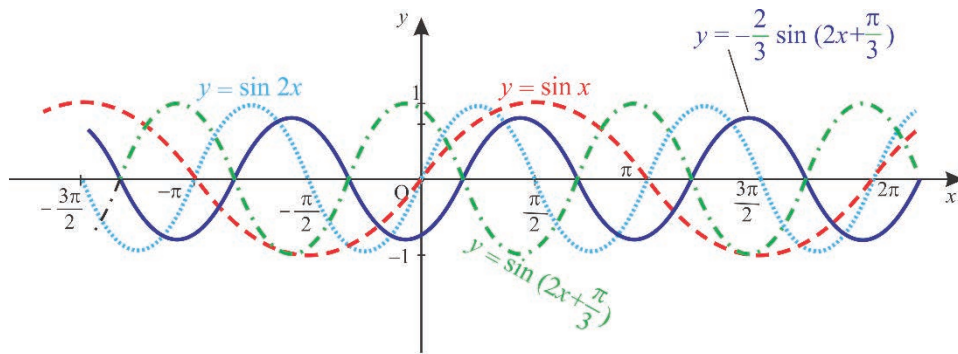
a) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = -\frac{2}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

a) $a = 2, b = 2, c = -\frac{\pi}{2}, T = \pi, \frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$. Dört adımın tamamı Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 6

b) $a = -\frac{2}{3}, b = 2, c = \frac{\pi}{3}, T = \pi, \frac{c}{b} = \frac{\pi}{6}$. Dört adımın tamamı Şekil 7'de verilmiştir.



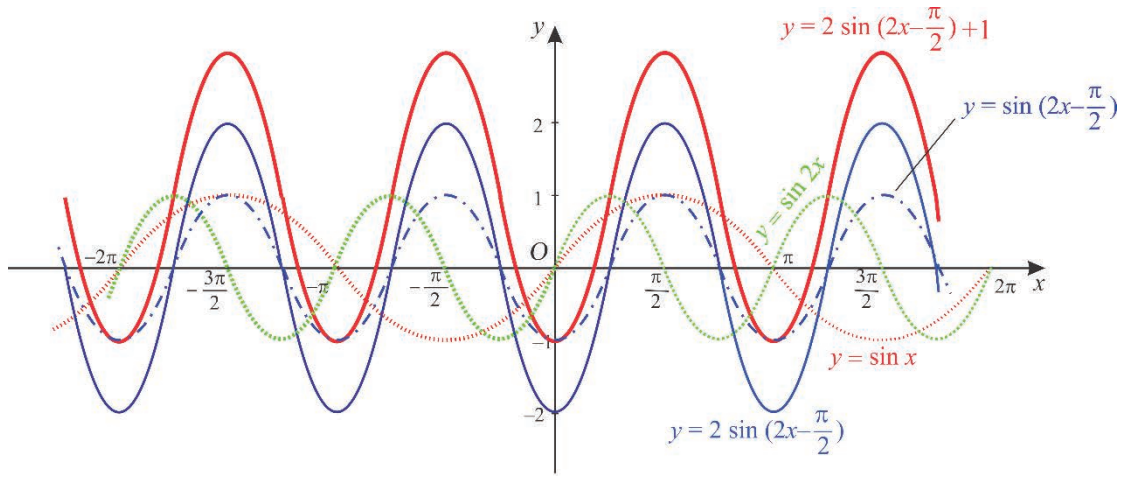
Şekil 7

Alıştırma 2. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. $y = a \sin(bx + c) + d$ biçimindeki bir fonksiyonun grafiğini çizmek için daha önce belirtilen 4 adımı uygulayınız ve $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ grafiğini çizmek için şu adımı da uygulamalıyız:

5. adım: $y = a \sin(bx + c)$ fonksiyonunun grafiğini y eksenini boyunca yukarı doğru $d > 0$ ise ve aşağı doğru $d < 0$ ise öteleyorz.

Bu demektir ki, $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ grafiğini 1 birim yukarıya doğru ötelemekle $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ grafiği elde edilecektir (şekil 8).



Şekil 8

$y = a \cos(bx + c) + d$ **fonksiyonunun grafiği**

$a \cos(bx + c) + d = a \sin\left(bx + c + \frac{\pi}{2}\right) + d$ olduğuna göre, $y = a \cos(bx + c) + d$ fonksiyonunun grafiği, $y = a \sin(bx + c_0)$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmesiyle elde edilebilir, burada $c_0 = c + \frac{\pi}{2}$ dir.

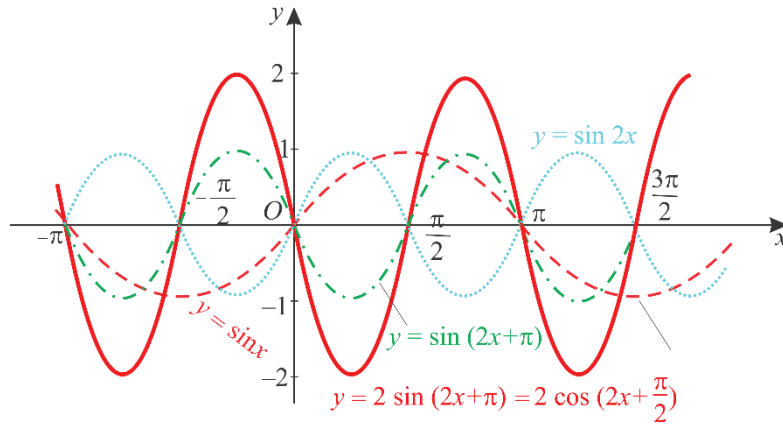
Bunun ifade, a 'nın genlik olduğu, $T = \frac{2\pi}{b}$ 'nin periyot olduğu ve $x = -\frac{c}{b}$ nin faz ötelenmesi olduğu anlamına gelir. Bunu göz önünde bulundurarak, $y = a \cos(bx + c) + d$ fonksiyonunun grafiği, $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiği yardımıyla kolayca çizilebilir.

Alıştırma 1. $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ olduğundan,}$$

$2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(2x + \pi\right)$ elde edilir. Buna göre, $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ grafiğinin çizimi, $y = 2 \sin(2x + \pi)$ fonksiyonunun grafiğinin çizimine indirgenir. Bu durumda şunları elde ediyoruz:

- Genlik $a = 2$,
- Periyot $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Faz ötelemesi: $x = -\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{2}$,
- Fonksiyonun sıfırları $2x + \pi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ denkleminde elde edilir, yani $x = \frac{k\pi - \pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. $k = 0, k = \pm 1, k = \pm 2, k = \pm 3$ için sırasıyla formülde değiştirmekle, fonksiyonun sıfırları: $x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \pi, x_5 = -\pi, x_6 = -\frac{3\pi}{2}$, elde edilir.
- Fonksiyonun maksimum değerini $2x + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ yani $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, denkleminde elde ederiz, buradan $k = 0$ için $x_{\max} = -\frac{\pi}{4}$ ve $k = 1$ için $x_{\max} = \frac{3\pi}{4}$ elde edilir.
- Fonksiyonun minimum değeri $k = 0, x_{\min} = \frac{\pi}{4}$ ve $k = 1, x_{\min} = \frac{5\pi}{4}$ elde edilir (Şekil 1).

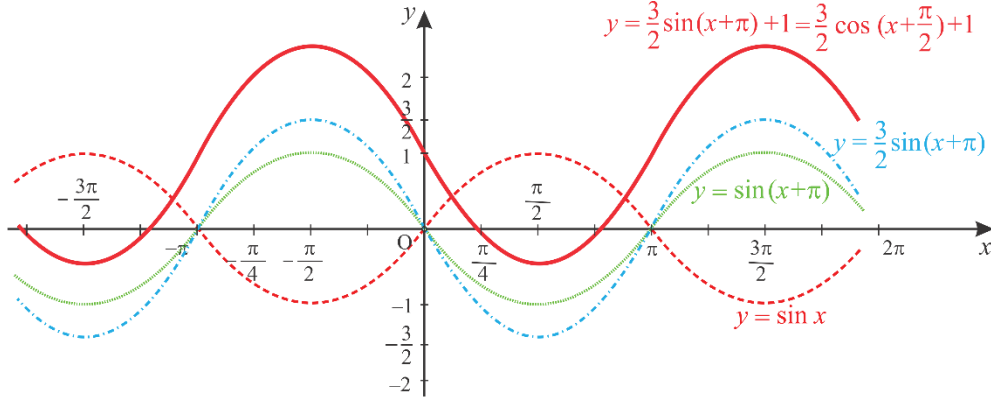


Şekil 1

Alıştırma 2. $y = \frac{3}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$\frac{3}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \text{ eşitliğinden,}$$

$$\frac{3}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \sin(x + \pi) + 1 \text{ elde ederiz.}$$



Şekil 2

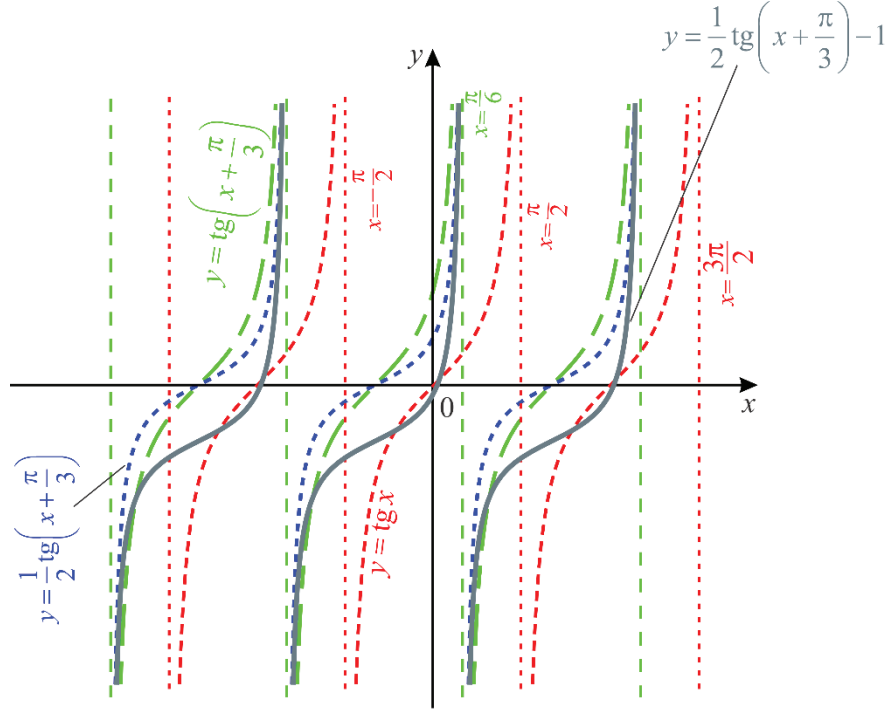
Demek ki, grafiğin çizimi, $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$, $T = 2\pi$, $x = -\frac{c}{b} = -\pi$ olan $y = \frac{3}{2} \sin(x + \pi) + 1$ fonksiyonunun grafiğinin çizimine indirgenir (şekil 2).

$y = a \operatorname{tg}(bx + c) + d$ **fonksiyonunun grafiği**

$y = \operatorname{tg} x$ fonksiyonunun özelliklerini zaten inceledik. $y = a \operatorname{tg}(bx + c) + d$ fonksiyonunun grafiği, $y = a \sin(bx + c) + d$ ve $y = a \cos(bx + c) + d$ fonksiyonlarının grafiklerine benzer şekilde elde edilir.

Örnek 1. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. İlk olarak, $y = \operatorname{tg} x$ fonksiyonunun grafiğini $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ aralığında çizeriz. Daha sonra, x eksenini boyuncaya $\frac{\pi}{3}$ birim sola kaydırılarak $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ grafiği elde edilir. Eğer $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ grafiğinin her ikinci koordinatı $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ elde edilir ve sonunda, grafik y - eksenini boyuncaya bir birim aşağı ötele-nirse, $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 1

Not. $\text{ctg } x = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ dönüştürme formülüyle, $y = a \text{ctg}(bx + c) + d$ fonksiyonun grafiği $y = -a \text{tg} \left(bx - \left(\frac{\pi}{2} - c \right) \right) + d$ fonksiyonun grafiğinden elde edilir.

Alıştırmalar

Verilen fonksiyonun grafiğini çiziniz:

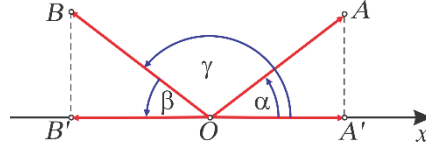
1. $y = 3 \sin x$
2. $y = -\frac{3}{2} \sin x$
3. $y = \sin 3x$
4. $y = \sin 3x - 1$
5. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$
6. $y = 2 \sin \left(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3} \right)$
7. $y = \frac{1}{2} \cos x$
8. $y = \cos 3x + 1$
9. $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 2.$

3.8. Adisyon Formülleri

$\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \alpha$ ve $\cos \beta$ değerleri yardımıyla, adisyon teoremleri olarak tanınan $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\text{tg}(\alpha + \beta)$, $\text{tg}(\alpha - \beta)$, $\text{ctg}(\alpha + \beta)$ ve $\text{ctg}(\alpha - \beta)$ fonksiyonların değerlerini belirleyebiliriz.

Daha önce bir eksen üzerindeki vektörün cebirsel değerinin ne olduğunu görelim. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ vektörleri ve bir x eksenini verilmiş olsun (şekil 1). Eğer $\overline{OA}$ vektörünün son

noktasından x eksenine bir dikme indirir ve kesişim noktasını A' ile işaretlersek, o zaman $\overrightarrow{OA}$ vektörünün x eksenindeki izdüşümünün $\overrightarrow{OA'}$ vektörü olduğunu söyleriz. Benzer şekilde, $\overrightarrow{OB'}$ vektörü $\overrightarrow{OB}$ 'nin x eksenindeki izdüşümüdür.



Şekil 1

$\overrightarrow{OA}$ vektörü ile x eksen (veya $\overrightarrow{OB}$ vektörü ile x eksen) arasındaki açıdan, x ekseninin pozitif yönde döndürülerek $\overrightarrow{OA}$ vektörü (veya $\overrightarrow{OB}$ vektörü) ile aynı doğrultu ve yöne sahip olacağı en küçük açıyı anlarız.

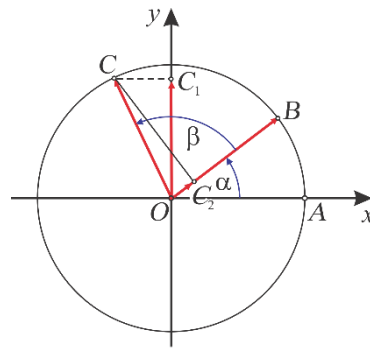
$\triangle OA'A'$ 'dan $\overrightarrow{OA'}$ vektörünün uzunluğu $|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \alpha$ olduğu elde edilir ve bu sayı $\overrightarrow{OA'}$ vektörünün x -ekseni üzerinde cebirsel değeridir. Benzer şekilde, $\overrightarrow{OB'}$ nin uzunluğu $|\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \beta$ olacaktır.

β açısını $\beta = \pi - \gamma$ olarak yazabiliriz. Bu durumda $\cos \beta = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$ olur. Dolayısıyla $|\overrightarrow{OB'}| = -|\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \gamma$, yani $|\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \gamma$, bu da $\overrightarrow{OB}$ vektörünün x eksenindeki cebirsel değeridir.

Yani, herhangi bir vektörün belirli bir eksen üzerindeki izdüşümünün cebirsel değeri, o vektörün uzunluğunun vektör ile eksen arasındaki açının kosinüsü ile çarpımına eşittir.

İki açının toplamının ve farkının sinüsü

β ile $\overrightarrow{OB}$ ve $\overrightarrow{OC}$ vektörleri arasındaki açıyı işaret edelim. Eğer $\overrightarrow{OB}$ vektörü x -ekseninin pozitif kısmı ile α açısı yapıyorsa, o zaman $\overrightarrow{OC}$ vektörünün x -ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açı $\alpha + \beta$ 'ye eşittir (Çizim 2).



Şekil 2

Sinüs fonksiyonunun tanımından, $\sin(\alpha + \beta) = |\overrightarrow{OC_1}|$ gerekir.

C noktasından $\overrightarrow{OB}$ vektörüne CC_2 ' dikmesini indirirsek:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{C_2C} \text{ elde edilir.}$$

$|\overline{OC_1}|$ değeri $\overline{OC}$ 'nin y - eksenini üzerindeki izdüşümünün cebirsel değeri olduğundan, $|\overline{OC_1}|$ değeri $\overline{OC_2}$ ve $\overline{C_2C}$ vektörlerinin toplamının y - eksenini üzerindeki izdüşümünün cebirsel değeridir, bu nedenle:

$$|\overline{OC_1}| = |\overline{OC_2}| \cdot \cos \angle(\overline{OC_2}, \overline{OC_1}) + |\overline{C_2C}| \cdot \cos \angle(\overline{C_2C}, \overline{OC_1}) \text{ elde edilir.}$$

Cebirsel değerden $|\overline{OC_2}| = |\overline{OC}| \cos \beta = \cos \beta$ ve $|\overline{C_2C}| = |\overline{OC}| \cdot \sin \beta = \sin \beta$ elde edilir. Dönüşüm formüllerinden $\cos \angle(\overline{OC_2}, \overline{OC_1}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ ve $\cos \angle(\overline{C_2C}, \overline{OC_1}) = \cos \alpha$ elde edilir. Bu ise $|\overline{OC_1}| = \cos \beta \cdot \sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ yani $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ gerektirir. Bu da iki açının toplamının sinüsüne ait formüldür.

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta)$ olduğu için, fonksiyonların özelliklerini uygulayarak şunları elde ederiz:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

yani iki açının farkının sinüsüne ait formül elde edilir.

Örnek 1. a) Adisyon formüllerini uygulayarak şunları hesaplayabiliriz:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1).$$

Örnek 2. a) $\sin 36^\circ \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ$ ifadesinde, $\alpha = 36^\circ$ ve $\beta = 24^\circ$ koyarsak,

$$\sin 36^\circ \cdot \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \cdot \sin 24^\circ = \sin(36^\circ + 24^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Benzer şekilde,

$$\sin 137^\circ \cdot \cos 62^\circ - \cos 137^\circ \cdot \sin 62^\circ = \sin(137^\circ - 62^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} + 1).$$

Alıştırma 1. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) =$

$$= \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 30^\circ \cdot \sin \alpha + \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 30^\circ \cdot \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha = \cos \alpha.$$

İki Açının Toplamının ve Farkının Kosinüsü

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \text{ olduğundan, } \cos(\alpha + \beta) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) \text{ ve}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) = \sin \left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right). \text{ Buna göre:}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Demek ki, $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ formülü, iki açının toplamının kosinüsü formülüdür.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

yani, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, iki açının farkının kosinüs formülüdür.

Örnek 3. a) İki açının toplamının kosinüs formülünü uygulayarak şunları hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

b) Benzer şekilde, iki açının farkının kosinüs formülünü uygulayarak,

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).\end{aligned}$$

Örnek 4. a) Eğer $\alpha = 107^\circ$ ve $\beta = 17^\circ$ alırsak,

$$\cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ = \cos(107^\circ - 17^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

b) Benzer şekilde, $\cos 36^\circ \cdot \cos 24^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 24^\circ = \cos(36^\circ + 24^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Alıştırma 2. $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm. $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) =$

$$\begin{aligned}&= \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha + \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha - \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha = \cos \alpha.\end{aligned}$$

İki Açının Toplamının ve Farkının Tanjantı

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ için tanımlı olduğundan, $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ olmak üzere.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Pay ve paydayı $\cos \alpha \cos \beta$ ($\cos \alpha \cdot \cos \beta \neq 0$) ile bölersek:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \text{ elde edilir.}$$

Buna göre,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

iki açının toplamının tanjantı formülüdür.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \text{ olduğuna göre,}$$

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ formülü elde edilir. Bu ise iki açının farkının tanjantı formülüdür.

Örnek 5. a) İki açının toplamına ait tanjant formülünü uygulayarak:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

b) Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 3. $\operatorname{tg} \alpha = 2$ olduğuna göre $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ değerini hesaplayınız:

Çözüm. İki açının toplamına ait tanjant formülünü uygulayarak:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + 1}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3 \text{ elde edilir.}$$

İki Açının Toplamının ve Farkının Kotanjantı

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ olduğuna göre,

$$\sin(\alpha + \beta) \neq 0 \text{ için, } \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \text{ elde edilir.}$$

Bu ifadenin pay ve paydasını $\sin \alpha \cdot \sin \beta \neq 0$ olmak üzere, $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ ile bölersek

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

elde edilir. Demek ki, $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$ $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ iki açının toplamının kotanjantı formülüdür.

Benzer şekilde, iki açının farkının kotanjantı formülü elde edilir:

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Örnek 6. a) İki açının toplamına ait kotanjant formülünü uygulamakla

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 105^\circ &= \operatorname{ctg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 - 1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{3 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 3)^2}{3 - 9} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{-6} = -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

b) Benzer şekilde

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{ctg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

elde edilir.

Alıştırma 4. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ ve $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre $\alpha + \beta$ toplamını belirtiniz.

Çözüm. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}} = -1$ ve $0 < \alpha + \beta < \pi$ olduğundan $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ elde edilir.

Alıştırmalar

1. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\sin 278^\circ \cdot \cos 68^\circ - \cos 278^\circ \cdot \sin 68^\circ$

b) $\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ$

c) $\cos 18^\circ \cdot \cos 63^\circ + \sin 18^\circ \cdot \sin 63^\circ$

ç) $\cos 32^\circ \cdot \cos 58^\circ - \sin 32^\circ \cdot \sin 58^\circ$.

2. Verilen ifadeleri sadeleştiriniz:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{ç) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

3. Verilenlere göre belirtiniz:

$$\text{a) } \operatorname{tg} \alpha = -1 \text{ ise, } \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ ve } \sin \beta = \frac{1}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ ise, } \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

4. Verilen özdeşlikleri ispatlayınız:

$$\text{a) } \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{b) } \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\text{c) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{ç) } \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta.$$

3.9. Çift Açılı ve Yarım Açılı Trigonometrik Fonksiyonları

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ formülünde, $\beta = \alpha$ yerine koyarsak, o zaman:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

elde edilir. Buna göre $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, çift açının sinüs formülüdür.

Benzer şekilde, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ formülünde, $\beta = \alpha$ yerine koyarak, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, yani çift açının kosinüs formülü elde edilir.

Çift açının tanjant ve kotanjant formülleri şunlardır:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ için } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ve } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \text{ için } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Örnek 1. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ve α ikinci bölgedeki bir açı olsun. Aşağıdaki değerleri bulunuz:

$$\text{a) } \sin 2\alpha \quad \text{b) } \cos 2\alpha \quad \text{c) } \operatorname{tg} 2\alpha \quad \text{ç) } \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Çözüm. Açı α ikinci bölgede olduğundan, $\cos \alpha < 0$ 'dır. O zaman:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12} \text{ ve } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{12}{5}.$$

$$\text{b) } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = -\frac{120}{119}$$

$$\text{ç) } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 - 1}{2 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)} = -\frac{119}{120}.$$

Alıştırma 1. Verilenlerin değerini belirtiniz:

$$\text{a) } 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

$$\text{b) } \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$$

$$\text{c) } \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}}$$

$$\text{ç) } \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - 1}{2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{Çözüm. a) } 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \sin 2 \cdot 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{b) } \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 2 \cdot 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{c) } \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg} 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\text{ç) } \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - 1}{2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}} = \operatorname{ctg} 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Alıştırma 2. Verilen özdeşliği ispatlayınız

$$\text{a) } 1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin 2\alpha \quad \text{b) } \operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

Çözüm. a) Sol tarafı dönüştürmekle:

$$1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= 1 - (1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = 1 - 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

elde edilir.

Sağ tarafta $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ elde edildiğine göre, eşitlik ispatlanmıştır.

b) Sol tarafın dönüştürülmesiyle:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\cos \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ olduğuna göre, eşitliğin sağ tarafı elde edilir.

Yarım açı biçiminde trigonometrik fonksiyonların formülleri $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ve $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ temel trigonometrik özdeşliklerinde α yerine $\frac{\alpha}{2}$ koyarak elde edeceğiz, yani

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ ve } \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha.$$

Bu iki denklemi toplarsak, $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$, yani: $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ elde edilir.

Bu ise yarım açıların kosinüs formülüdür.

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ dan } \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \text{ 'yı çıkararak:}$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha, \text{ yani } \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ elde edilir. Bu ise, yarım açının sinüsü}$$

formülüdür.

$1 + \cos \alpha \geq 0$ ve $1 - \cos \alpha \geq 0$ olduğuna göre, $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ ve $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ formülleri anlamlıdır.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ için } \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ve}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

olduğundan, yarım açının sinüs ve kosinüs formüllerini yerine koyarak yarım açının tanjant ve kotanjant formülleri elde edilir, yani:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \text{ ve } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

Kökün önündeki işaret, $\frac{\alpha}{2}$ açının hangi bölgede olduğuna ve o açının trigonometrik fonksiyonunun işaretine bağlı olarak seçilir.

Örnek 2. Eğer $\alpha = 15^\circ$ ise, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ve $\operatorname{ctg} \alpha$ değerlerini bulunuz.

a) $\alpha = 15^\circ$ **b)** $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

a) $\alpha = 15^\circ$ açısını $\frac{30^\circ}{2}$ şeklinde yazmakla:

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

elde edilir.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{ctg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ}} = 2 + \sqrt{3}$$

b) $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$ olduğuna göre:

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Alıştırırmalar

1. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ve α ikinci bölgedeki bir açı olsun. Aşağıdaki değerleri bulunuz:

a) $\sin 2\alpha$ **b)** $\cos 2\alpha$ **c)** $\operatorname{tg} 2\alpha$ **d)** $\operatorname{ctg} 2\alpha$

2. $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ belirtilsin.

3. İfadeleri sadeleştiriniz:

a) $2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$ **b)** $\cos^2 \frac{\pi}{10} - \sin^2 \frac{\pi}{10}$

c) $\sin \frac{\pi - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\pi - \alpha}{2}$ **d)** $\frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}$

4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ve $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ise, aşağıdaki değerleri bulunuz:

a) $\sin 2\alpha$ **b)** $\cos 2\alpha$ **c)** $\operatorname{tg} 2\alpha$ **ç)** $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

5. Kesirleri sadeleştiriniz:

a) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$ **b)** $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$

c) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$ **ç)** $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

3.10. Trigonometrik Fonksiyonların Dönüşümü

Trigonometrik Fonksiyonların Çarpımının Toplam ve Fark Şeklinde Dönüşümü

Eşitlikleri toplayarak:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \text{ elde edilir.}$$

İkinci denklemden birincisini çıkarırsak, şunları elde ederiz:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Benzer şekilde,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

denklemleri toplayarak:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

elde ederiz:

Örnek 1. $\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$ çarpımının değerini bulunuz.

Çözüm. Farklı iki açının sinüs ve kosinüsünün çarpımını dönüştürme formülünü uygulayarak şunları elde ederiz:

$$\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\sin \pi + \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = -\frac{1}{4}.$$

Örnek 2. $2 \sin \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$ çarpımının değerini bulunuz.

Çözüm. Farklı iki açının sinüslerinin çarpımını dönüştürme formülünü uygulamakla çarpım belirtilir:

$$2 \sin \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) \right) = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Alıştırma 1. $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{4}(2 \cos 2\alpha + 1)$. özdeşliğini ispatlayınız.

Çözüm. Farklı iki açının sinüslerinin çarpımını dönüştürme formülünü uygulayarak özdeşliği ispatlıyoruz:

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4}(2 \cos 2\alpha + 1).$$

Trigonometrik Fonksiyonların Toplam ve Farkının Çarpım Şeklinde Dönüşümü

Çarpımı toplam veya fark şeklinde dönüştürme formüllerine $x = a + \beta$ ve $y = a - \beta$ koyarsak, $\alpha = \frac{x+y}{2}$ ve $\beta = \frac{x-y}{2}$ elde edilecektir. Bunları yerlerine koyarak, sinüslerin toplam ve fark formüllerini elde ederiz:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} .$$

Örnek 3. Toplamı veya farkı çarpım biçiminde yazınız:

a) $\sin \alpha + \cos \alpha$ **b)** $\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{5}.$

Çözüm. a)

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \alpha &= \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned}$$

b) $\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{3\pi}{20} \cdot \sin \frac{\pi}{20} .$

$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y$ ve $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y$ formülleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}, \text{ için } x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), y \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ neresi } k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}, \text{ için } x \neq k\pi, y \neq n\pi, k, n \in \mathbb{Z} .$$

Alıştırmalar

1. $4 \sin \left(1 + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(1 + \frac{\pi}{3} \right)$ ifadesini belirtiniz.

2. $\cos 70^\circ \cos 50^\circ$ çarpımını toplama dönüştürünüz.

3. Yazın aşağıdaki fonksiyonları toplam olarak:

a) $\cos^2 \alpha$

b) $\sin^3 \alpha$

4. $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = 1$ olduğunu ispatlayınız.

5. Toplamı veya farkı çarpım olarak yazınız:

a) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$

b) $\cos 73^\circ - \cos 47^\circ$

c) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ$

6. Eşitlikleri ispatlayınız:

a) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

b) $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$.

7. İspatlayınız:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \alpha$

b) $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \sqrt{3} \sin \alpha$.

3.11. Trigonometrik Denklemler

Tanım 1. İçinde bilinmeyen trigonometrik fonksiyon olarak verilmiş olan denklemlere, **trigonometrik denklemler** denir.

Örnek 1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x + \cos x = \sin x$, $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} - 1 = 0$ gibi denklemler trigonometrik denklemlerdir, ancak $x + \sin x = 1$ denklemi trigonometrik değildir.

Tanım 2. Bir trigonometrik denklemin **çözümü**, o denklem için doğru bir sayısal eşitliğe dönüştüren, radyan cinsinden ifade edilen açılar kümesidir.

Temel trigonometrik denklemler $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ ve $\operatorname{ctg} x = a$ 'dır, burada $a \in \mathbb{R}$ 'dir.

$\sin x = a$ **denklemini**, $a \in \mathbb{R}$ için

$-1 \leq \sin x \leq 1$ olduğundan, $\sin x = a$ denkleminin sadece $-1 \leq a \leq 1$ olduğu durumda çözümü vardır.

$-1 < a < 1$ için, $[0, 2\pi]$ aralığında sinüsü a 'ya eşit tam olarak iki açı vardır.

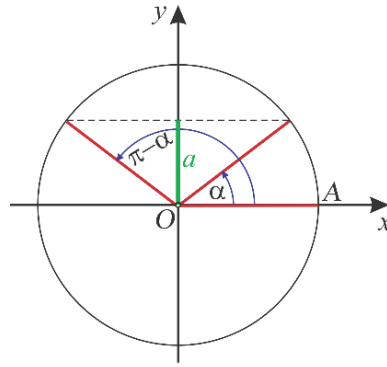
I.Durum: $0 \leq a < 1$ için $\sin x = a$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığında sinüsü a 'ya eşit olan iki açı vardır ve bunlardan biri I. dördülde, diğeri ise II.dördüldedir (şekil 1). Bunların toplamı π 'dir. Dolayısıyla, I. bölgedeki açıyı α ile gösterirsek, II. bölgedeki açı $\pi - \alpha$ olarak gösterilebilir. $y = \sin x$ fonksiyonunun periyodikliğinden, denklemin çözümleri şu şekildedir:

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ ve } x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi = -\alpha + (2k + 1)\pi,$$

burada $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ 'dir.

veya

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\alpha + (2k + 1)\pi, \text{ burada } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ve } k \in \mathbb{Z}' \text{ dir.}$$



Şekil 1

Açı grafiksel olarak veya bir hesap makinesi ile belirlenebilir.

Örnek 1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. denklemini çözünüz.

Çözüm. $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, olduğuna göre, denklemin çözümleri şunlardır:

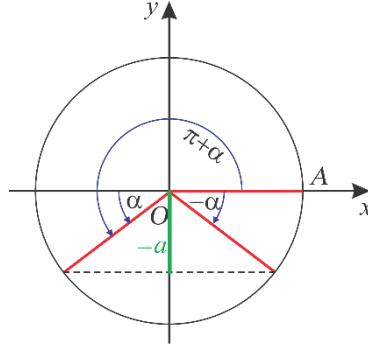
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ve } x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ } k \in \mathbb{Z}.$$

II.Durum: $-1 < a \leq 0$ için $\sin x = a$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığında sinüsü a 'ya eşit olan iki açı vardır ve bunlardan biri III. dördülde, diğeri ise IV. dördüldedir (şekil 2). Eğer III. dördüldeki açıyı $\pi + \alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ile gösterirsek, o zaman IV. dördüldeki açı $-\alpha$ olarak gösterilebilir. Dolayısıyla, verilen denklemin çözümleri aşağıdaki şekilde olan tüm reel sayılardır:

$$x_1 = (\pi + \alpha) + 2k\pi = \alpha + (2k + 1)\pi \text{ ve } x_2 = -\alpha + 2k\pi \text{ burada } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

veya

$$x_1 = \alpha + (2k + 1)\pi \text{ ve } x_2 = -\alpha + 2k\pi, \text{ burada } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ } k \in \mathbb{Z}.$$



Şekil 2

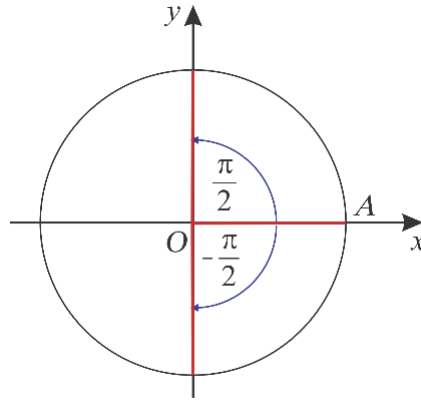
Örnek 2. $\sin x = -\frac{1}{2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ olduğu için, $\sin x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözümleri şunlardır:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

III. Durum: $a = 1$ ve $a = -1$ durumlarında, $\sin x = 1$ ve $\sin x = -1$ denklemlerini elde ederiz. Denklemlerin çözümleri şu şekildedir (şekil 3):

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Şekil 3

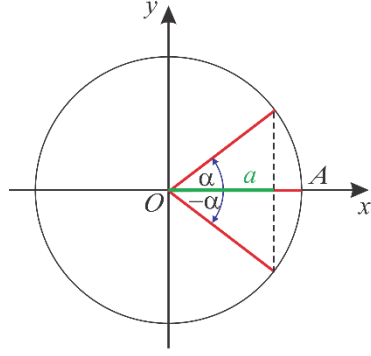
$\cos x = a$ **denklemi**, $a \in \mathbb{R}$

$\sin x = a$ denklemine benzer şekilde, $\cos x = a$ denkleminin sadece $-1 \leq a \leq 1$ olduğu durumda çözümü vardır. O zaman $[0, 2\pi]$ aralığında kosinüsü a 'ya eşit tam olarak iki açı vardır.

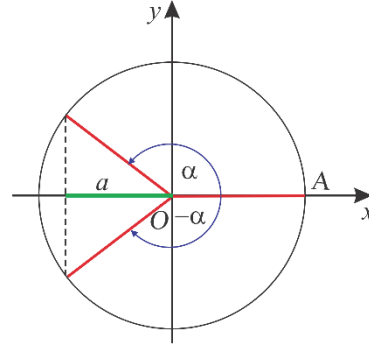
I. Durum: $\cos x = a$ denkleminin $0 \leq a < 1$ için çözümü, I. ve IV. dördüldeki iki açıdır. Eğer I. dördüldeki açıyı α ile gösterirsek, o zaman IV. dördüldeki açı $-\alpha$ 'dır (şekil 4). $y = \cos x$ fonksiyonunun periyodikliğini göz önünde bulundurarak, denklemin çözümleri aşağıdaki şekilde olan tüm reel sayılardır:

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\alpha + 2k\pi, \text{ burada } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ve } k \in \mathbb{Z}.$$

II. Durum: $\cos x = a$ denkleminin $-1 \leq a \leq 0$ için çözümü, II. ve III. dördüldeki iki açıdır. Eğer II. dördüldeki açıyı α ile gösterirsek, o zaman III. dördüldeki açı $-\alpha$ 'dır (şekil 5). $y = \cos x$ fonksiyonunun periyodikliğini tekrar göz önünde bulundurarak, denklemin çözümleri aşağıda gösterilen türden olan tüm reel sayılardır:



Şekil 4



Şekil 5

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\alpha + 2k\pi, \text{ burada } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ve } k \in \mathbb{Z}.$$

Örnek 3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Çözüm. a) $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ den, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denklemin çözümü

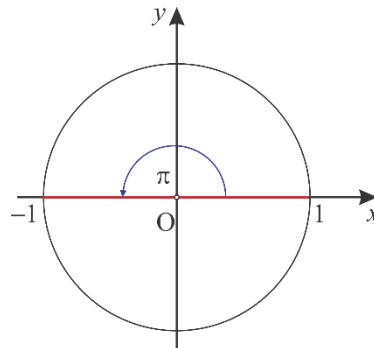
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ şeklinden olan tüm reel sayılardır.}$$

b) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$ olduğuna göre, $\cos x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözümü:

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ve } x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ şeklinde olan tüm reel sayılardır.}$$

III. Durum: $a = 1$ ve $a = -1$ için, $\cos x = 1$ ve $\cos x = -1$ denklemlerini elde ederiz. Çözümleri (şekil 6) sırasıyla şunlardır:

$$x_1 = 2k\pi \text{ ve } x_2 = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

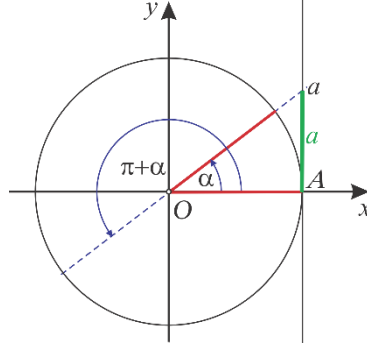


Şekil 6

$\text{tg } x = a$ ve $\text{ctg } x = a$ denklemleri

$\text{tg } x = a$ denkleminin her a değeri için çözümü vardır, yani her a reel sayısı için tanjantı a 'ya eşit olan $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında tek olarak belli bir açı vardır (şekil 7). Eğer bu açıyı α ile gösterirsek, verilen denklemin çözümleri şu şekildedir:

$$x = \alpha + k\pi, \text{ burada } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ve } k \in \mathbb{Z} \text{ dir.}$$



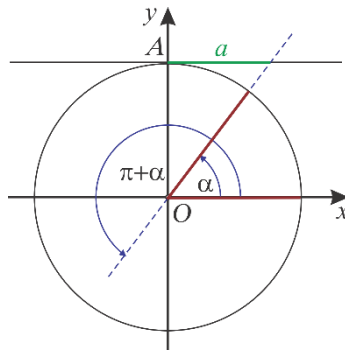
Şekil 7

Örnek 4. $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ olduğuna göre, denklemin çözümleri $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

cinsinden tüm reel sayılardır.

$\text{ctg } x = a$ denkleminin her a değeri için tek olarak belli bir çözümü vardır. $(0, \pi)$ aralığında $\text{ctg } x = a$ olan sadece bir açı vardır (şekil 8). $\text{ctg } x$ fonksiyonunun periyodikliği nedeniyle, verilen denklemin çözümleri $0 < \alpha < \pi, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \alpha + k\pi$ cinsinden tüm reel sayılardır.



Şekil 8

Örnek 5. $\text{ctg } x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\text{ctg } x = 1$ 'den, denklemin çözümleri $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ cinsinden tüm reel sayılardır.

Alıştırımlar

Denklemleri çözünüz:

1. $\sin x = -\sqrt{3}$. 2. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. $\text{tg } x = -\sqrt{3}$. 6. $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 7. $\text{ctg } x = \sqrt{3}$. 8. $\text{ctg } x = -1$.

9. $\text{tg } x = 2$. 10. $\text{ctg } x = -3$. 11. $\sin x = -0,4$. 12. $\cos x = 0,6$.

3.12. Temel Trigonometrik Denklemlere İndirgenebilen

Bu derste, $\sin f(x) = a$ veya $f(\sin x) = 0$ ve benzeri şekillerdeki trigonometrik denklemlerin çözüm sürecini inceleyeceğiz, burada f bir polinomdur. Örneğin, $\sin(3x + 4) = 1$, $\cos(x^2 + 2) = 0$, $\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$ vb. denklemler böyledir. Bunların çözüm süreci esas olarak $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\text{tg } x = a$ ve $\text{ctg } x = a$ gibi temel trigonometrik denklemlere indirgemekten oluşur.

Örnek 1. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

a) $\sin 2x = 0$ b) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ ç) $\text{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Çözüm. a) $\sin 2x = 0$ 'dan, $2x = k\pi$, yani $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 'den, $2x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ve $2x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ yani:

$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ve $x_2 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ elde edilir.

c) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ ten $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi$ yani

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ elde edilir.

d) $\text{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ 'den, $x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, yani $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ elde edilir.

Örnek 2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

a) $3 \sin(2x - 1) = 1$ **b)** $\cos(x^2 - 1) = 1$

Çözüm. a) $3 \sin(2x - 1) = 1$ denkleminde, $2x - 1 = t$ dönüşümü yapılır, bu da hangi açının sinüsünün $\sin t = \frac{1}{3}$ olduğu anlamına gelir.

Bu açının değeri bir hesap makinesi yardımıyla elde edilir. Açının büyüklüğünü belirleme prosedürü, hesap makinesinin $\sin^{-1}$ seçeneği ile yapılır. Bu durumda yaklaşık olarak 0.33984 elde ederiz, bu nedenle denklemin çözümleri şunlardır:

$$t_1 = 0.33984 + 2k\pi \text{ ve } t_2 = \pi - 0.33984 + 2k\pi, \text{ yani}$$

$$2x - 1 = 0.33984 + 2k\pi \text{ ve } 2x_2 = -0.33984 + 2\pi + 1, \text{ yani}$$

$$x_1 = 0.66992 + k\pi \text{ ve } x_1 = 0.33008 + (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos(x^2 - 1) = 1$ ’den, $x^2 - 1 = 2k\pi$ gerekir. Buradan $x = \pm\sqrt{1 + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ elde edilir.

$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, a \neq 0$ denklemi, $\sin x = t$ dönüşümü yapılarak çözülür. Elde edilen ikinci dereceden t ’ye göre denklem: $at^2 + bt + c = 0, \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ koşulu altında reel, bazen de birbirine eşit çözümlere sahiptir. Verilen denklem, $\sin x = t_1$ veya $\sin x = t_2$ denklemlerine denktirler. Yukarıdaki denklemlerin her biri, $|t_1| \leq 1$ veya $|t_2| \leq 1$ koşulu altında verilen denklemin çözümlerini verir.

Alıştırma 1. $2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ’ten, verilen denkleme denk olan: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ denklemi elde edilir. Burada $t = \sin x$ dönüşümü yapılarak, t ’ye göre ikinci dereceden bir denklem elde ederiz: $2t^2 + t - 1 = 0$, kökleri $t_1 = -1$ ve $t_2 = \frac{1}{2}$ ’dir. Verilen denklem, $\sin x = -1$ ve $\sin x = \frac{1}{2}$ denklemlerine denktir. Birinci denklemin çözümleri $x = -\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere tüm reel sayılardır, ikinci denklemin çözümleri ise $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ve $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ ’dir. Dolayısıyla, verilen denklemin çözümleri $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ve $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere tüm reel sayılardır.

Alıştırma 2. $tg^3 x + 5 tg^2 x + 7 tg x = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $tg x = t$ ile feğıştirmekle $t^3 + 5t^2 + 7t = 0$ denklemi elde edilir. Bu ise $t^3 + 5t^2 + 7t = t(t^2 + 5t + 7) = 0$ denklemine denktir. Bu denklemin $t = 0$ olmak üzere bir tek reel çözümü vardır. Verilen denklem, $tg x = 0$ denklemine denktir ve çözümleri $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

şeklinden tüm reel sayılardır. Buna göre, $x = k\pi, \in \mathbb{Z}$ verilen denklemin çözümleridir.

Alıştırmalar

Verilen denklemleri çözünüz:

1. $2 \sin x - \sqrt{3} = 0.$

2. $2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0.$

3. $\cos \pi x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. $\cos \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

5. $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$

6. $\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

7. $\operatorname{tg} 2x = -1.$

8. $\operatorname{tg} 3x = 0.$

9. $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}.$

10. $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$

11. $\operatorname{ctg} 3x = 1.$

12. $\operatorname{ctg} 5x = 0.$

13. $\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$

14. $\operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$

15. $\sin^2 x + 2 \sin x = 0.$

16. $2 \sin x \cos x - \sin x = 0.$

17. $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$

18. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}.$

19. $8 \cos^2 x + 6 \sin x - 3 = 0.$

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Verilen açıları radyan olarak yazınız:

a) $\alpha = 135^\circ$

b) $\alpha = 4^\circ 24'.$

2. $\alpha = \frac{15\pi}{8}$ rad açısını derece cinsinden yazınız.

3. Verilen trigonometrik fonksiyonları, dar açılı trigonometrik fonksiyonu biçiminde yazınız.

a) $\sin 132^\circ, \sin 215^\circ, \sin 296^\circ$

b) $\cos 148^\circ, \cos 196^\circ, \cos 312^\circ$

c) $\operatorname{tg} 176^\circ, \operatorname{tg} 242^\circ, \operatorname{tg} 291^\circ$

ç) $\operatorname{ctg} 153^\circ, \operatorname{ctg} 206^\circ, \operatorname{ctg} 234^\circ.$

4. Verilenlerin değerini belirtiniz:

a) $\sin(-82^\circ)$

b) $\operatorname{tg}(-19^\circ)$

c) $\cos(-159^\circ)$

ç) $\operatorname{ctg}(-296^\circ).$

5. Verilen ifadenin değerini belirtiniz:

a) $\sin 52^\circ + \operatorname{tg} 312^\circ - \cos 164^\circ + \operatorname{ctg} 197^\circ$

b) $\operatorname{tg} 340^\circ - \sin 78^\circ + \cos 174^\circ - \operatorname{ctg} 204^\circ$

c) $4 \sin 236^\circ + \cos 24^\circ - 3 \operatorname{tg} 133^\circ + \operatorname{ctg} 242^\circ$.

6. Verilenlerin değerini belirtiniz:

a) $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$ olduğuna göre, $\sin(\alpha - \beta)$, $(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2})$ ve $\cos \beta = \frac{24}{25}$, $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$.

b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ise, $\cos(\alpha + \beta)$, $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ ve $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $(180^\circ < \beta < 270^\circ)$.

c) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\sin \beta = \frac{2}{3}$ olduğuna göre, $\cos(\alpha - \beta)$, α ve β dar açılar.

ç) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ve $\sin \beta = \frac{7}{25}$, $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$ olduğuna göre, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ve $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

7. Verilenlerin değerini belirtiniz:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ olduğuna göre, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ve $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ olduğuna göre, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ve $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

c) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ve $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{5}$, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ olduğuna göre, $\sin 2\alpha + \operatorname{tg} \beta$.

8. Verilen cebirsel toplamları çarpım biçiminde yazınız:

a) $\sin 62^\circ + \sin 38^\circ$

b) $\cos 60^\circ + \cos 8^\circ$

c) $\sin 64^\circ - \sin 26^\circ$

ç) $\cos 74^\circ - \cos 22^\circ$.

9. Verilen özdeşliği ispatlayınız:

a) $\frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

b) $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

c) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha$

ç) $\frac{\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)}{\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) - \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

d) $\frac{\cos(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)} = -1$

e) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

10. Verilen trigonometrik denklemleri çözünüz:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = 0$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

ç) $\operatorname{tg} x = 1$

d) $2 \cos x + 1 = 0$

e) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

f) $\sin x + 10^\circ = \cos 55^\circ$

g) $\cos(70^\circ - x) = \sin 30^\circ$

ğ) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

h) $\sin x + 2 = 5 \sin x$

ı) $1 + \cos x = 3 - 3 \cos x$

î) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$

j) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

k) $\sin 2x - \cos x = 0$

l) $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

m) $\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

n) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$

o) $\sin^2 x + 5 \cos^2 x + 2 \cos x = 3.$

4. DÜZLEMDE ANALİTİK GEOMETRİ

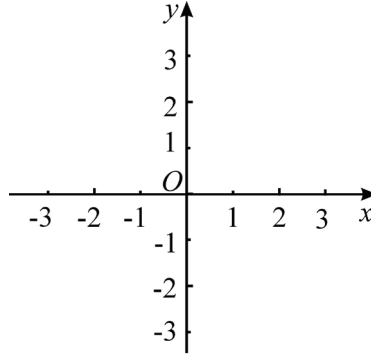
4.1. İki Nokta Arasındaki Mesafe

Düzlemde Dik Koordinat Sistemi

Sayı doğrusundaki her noktanın konumunun, **noktanın koordinatı** olarak adlandırılan tek bir reel sayı x ile tek olarak belli bir şekilde belirlendiğini biliyoruz. Benzer şekilde, dik koordinat sistemi kullanarak, düzlemdeki her noktanın konumunun, **noktanın koordinatları** olarak adlandırılan tek olarak belli bir sıralı reel sayı çifti (x, y) ile tek olarak belli bir şekilde belirlendiğini göstereceğiz.

Dik koordinat sistemi, **koordinat eksenleri** olarak adlandırılan iki dik sayı doğrusundan oluşur. İki eksenin kesiştiği noktaya **koordinat başlangıcı** denir ve genellikle O ile gösterilir. Yatay eksene x -ekseni veya **apsis eksen**i, dikey eksene ise y -ekseni veya **ordinat eksen**i denir. Koordinat sisteminin tanımlandığı düzleme koordinat düzlemi denir.

Genellikle, iki koordinat ekseninde de aynı birim ölçüsünü seçeriz. Pozitif yön olarak, koordinat başlangıcının sağındaki yön ve ordinat ekseninde koordinat başlangıcının yukarıdaki yön alınır (şekil 1).

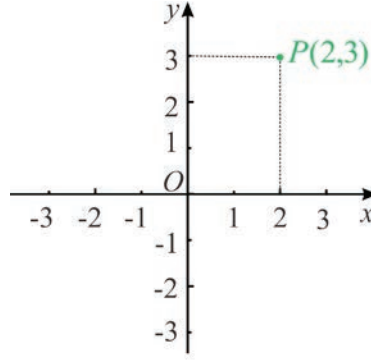


Şekil 1

Koordinat düzleminde herhangi bir P noktası olsun ve M ve N , sırasıyla x eksen ve y eksen üzerindeki izdüşümleri olsun. x eksen üzerindeki M noktasına tam olarak bir reel sayı x karşılık gelir. Benzer şekilde, y eksen üzerindeki N noktasına tam olarak bir reel sayı y karşılık gelir. Bu nedenle, P noktasının konumu, P noktasının **koordinatları** olarak adlandırılan sıralı bir reel sayı çifti (x, y) ile tamamen belirlenir. Burada x 'e **birinci koordinat** veya **apsis**, y 'ye ise **ikinci koordinat** veya P noktasının **ordinatı** denir ve $P(x, y)$ olarak yazarız.

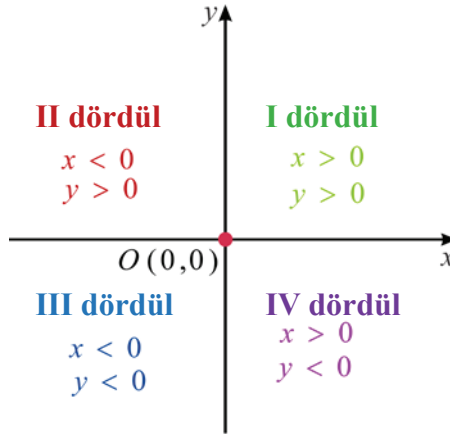
Örnek 1. $P(-3, 6)$ noktasının birinci koordinatı $x = -3$ ve ikinci koordinatı $y = 6$ 'dır.

$P(x, y)$ noktasının konumunu belirtmek veya çizmek, P noktasından geçen koordinat eksenlerine dikmelerin kesişim noktasını belirlemek anlamına gelir.



Şekil 2

Örnek 2. $P(2, 3)$ noktasını oluşturmak için, koordinatı 2 olan noktadan x eksenine bir dikme çizeriz. Benzer şekilde, koordinatı 3 olan noktadan y eksenine bir dikme çizeriz. Dikmelerin kesişim noktası istenen noktadır (şekil 2).



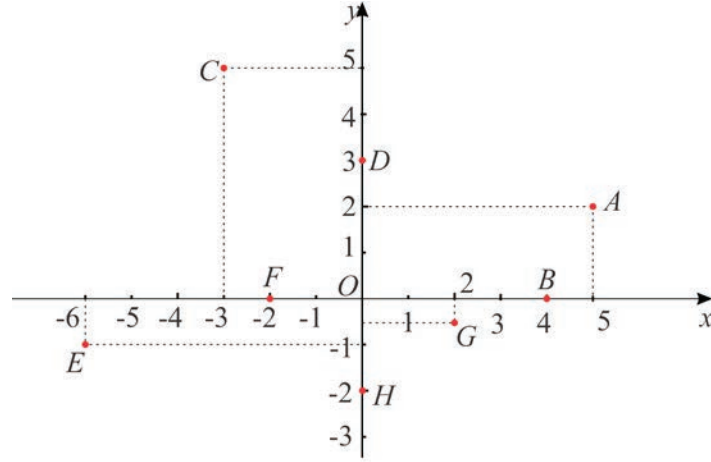
Şekil 3

Koordinat eksenleri, koordinat düzlemini **dördüller** olarak adlandırılan dört bölüme ayırır. **I. dördül** olarak sağ üst kısım, **II. dördül** olarak sol üst kısım, **III. dördül** olarak sol alt kısım ve **IV. dördül** olarak sağ alt kısım alınır. Buna göre, herhangi bir $P(x, y)$ noktası şu durumlarda bulunur: $x > 0$ ve $y > 0$ ise I. dördülde; $x < 0$ ve $y > 0$ ise II. dördülde; $x < 0$ ve $y < 0$ ise III. dördülde; $x > 0$ ve $y < 0$ ise IV. dördülde; $y = 0$ ise x ekseninde; $x = 0$ ise y ekseninde. Koordinat başlangıcı hem x ekseninde hem de y ekseninde olduğundan, her iki koordinatı da sıfıra eşittir, yani $O(0, 0)$ (şekil 3).

Alıştırma 3. Düzlemde aşağıdaki noktaları işaretleyiniz:

- a) $A(5, 2)$ b) $B(4, 0)$ c) $C(-3, 5)$ ç) $D(0, 3)$
d) $E(-6, -1)$ e) $F(-2, 0)$ f) $G(2, -1/2)$ g) $H(0, -2)$

ve ardından hangi bölgede veya hangi koordinat eksenine ait olduklarını belirleyiniz.



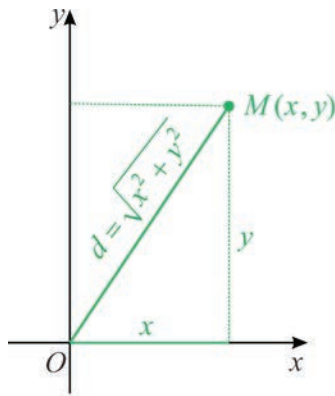
Şekil 4

- Çözüm. a)** A(5,2) noktası I. dördüyle aittir. **b)** B(4,0) x -eksenine aittir.
c) C(-3,5) noktası II. dördüyle aittir. **ç)** D(0,3) y -eksenine aittir.
d) E(-6,-1) noktası III. dördüyle aittir. **e)** F(-2, 0) x -eksenine aittir.
f) $G\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ IV dördüyle aittir.
g) H(0,-2) y -eksenine aittir.

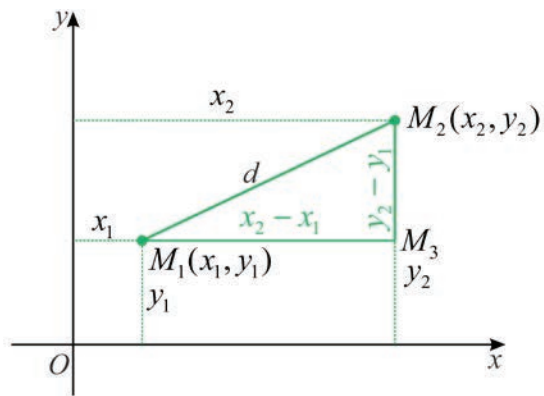
İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik bir yöntem kullanarak, koordinat düzlemindeki iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplama problemini çözeceğiz. Yani, verilen iki nokta M_1 ve M_2 arasındaki d uzaklığı, M_1M_2 doğru parçasının uzunluğuna eşittir, yani $d = \overline{M_1M_2}$.

Verilen noktalardan birinin koordinat başlangıcı olduğu daha basit durumu çözelim (şekil 5).



Şekil 5



Şekil 6

$M(x, y)$ noktasından x eksenine indirilen dikmenin ayağı N olsun. ONM dik üçgeninden Pisagor teoremi gereği şunları elde ederiz:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Örnek 4. $M(3, 4)$ noktasının koordinat başlangıcına olan uzaklığı

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ dir.}$$

Genel duruma geçelim. $M_1(x_1, y_1)$ ve $M_2(x_2, y_2)$ gibi iki nokta verilsin ve aralarındaki d uzaklığı bulmamız gerekiyor (şekil 6). $M_1M_2M_3$ dik üçgenini ele alalım. Dik kenarların uzunlukları sırasıyla $M_1M_3 = |x_2 - x_1|$ ve $M_2M_3 = |y_2 - y_1|$ 'dir. M_1 ve M_2 noktaları arasındaki d uzaklığı, M_1M_2 hipotenüsünün uzunluğuna eşittir, yani:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Örnek 5. $M_1(-2, 3)$ ve $M_2(0, -2)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız:

$$d = \sqrt{(0 - (-2))^2 + ((-2) - 3)^2} = \sqrt{29}.$$

Alıştırma 6. $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$ ve $C(1, -2)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olup olmadığını kontrol ediniz.

Çözüm. AB , AC ve BC uzunluklarını hesaplayarak, içlerinden birinin diğer ikisinin toplamı olup olmadığını kontrol edeceğiz:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$ 'den, verilen noktaların aynı doğru üzerinde olduğunu elde ederiz.

Alıştırma 7. Köşeleri $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ ve $C\left(1, \frac{9}{4}\right)$ olan üçgenin kenarlarına göre hangi türden olduğunu belirleyiniz.

Çözüm. Kenarlarının uzunluklarını $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ve $\overline{BC}$ bulalım:

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$ 'den, verilen üçgenin ikizkenar olduğunu elde ediyoruz.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki noktaların hangi bölgede veya hangi koordinat eksenine ait olduğunu belirleyin:

a) $A(3, -4)$ **b)** $B(-1, 1)$ **c)** $C(3, 5)$ **ç)** $D(2, 3)$

d) $E(-6, 0)$ **e)** $B\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ **f)** $G\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **g)** $H(0, -1)$

ve hangi bölgede veya hangi eksene ait olduklarını belirleyiniz.

2. $A(1, 4)$ ve $B(5, 2)$ uç noktalarının koordinatları biliniyorsa AB doğru parçasını oluşturun. Ardından, x - eksen ve y -ekseni üzerindeki m_x ve m_y dik izdüşümlerinin uzunluklarını bulunuz.

3. Köşelerinin koordinatları $A(1, -3)$, $B(5, 2)$ ve $C\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ verilmiş olan ABC üçgenini oluşturunuz.

4. Aşağıdaki noktalar arasındaki uzaklığı hesaplayınız:

- a) $M_1(1, -3)$ ve $M_2(2, 6)$ b) $M_1(0, 2)$ ve $M_2(0, -2)$
 c) $M_1(-1, -2)$ ve $M_2(2, 4)$ ç) $M_1(1, 3)$ ve $M_2(7, 0)$.

5. $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ ve $C(-5, 7)$ noktalarının bir üçgenin köşeleri olup olmadığını kontrol ediniz.

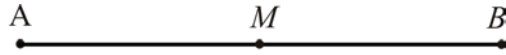
6. $A(-1, 5)$ noktasına olan uzaklığı 10 olan ve apsisi 7'ye eşit olan B noktasının ordinatını bulunuz.

7. $A(5, 8)$ ve $B(-11, -2)$ noktaları veriliyor. B noktasına göre A noktasına simetrik olan C noktasının koordinatlarını bulunuz.

4.2. Bir Doğru Parçasını Verilen Bir Oranda Bölme

AB doğru parçası üzerinde $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ ($A \neq B$) olacak şekilde M noktası varsa, M noktasına AB doğru parçasını λ oranında böler deriz.

Örnek 1. Eğer M noktası AB doğru parçasının orta noktası ise, $\overline{AM} = \overline{MB}$ dir, yani M noktası AB doğru parçasını A'dan B'ye doğru $\lambda = 1$ oranında böler (Şekil 7).



Şekil 7



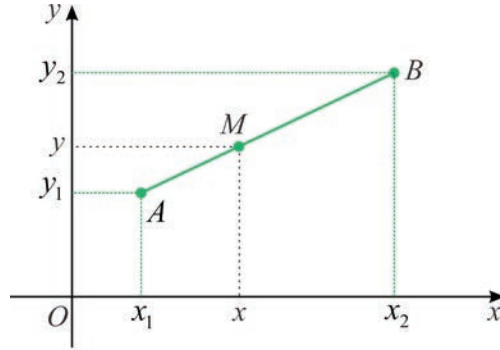
Şekil 8

Örnek 2. P ve Q noktalarının AB doğru parçasını üç eşit parçaya böldüğünü ve $\overline{AP} < \overline{AQ}$ olduğunu varsayalım. O zaman $\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{PB}$ ve $\overline{AQ} = 2 \overline{QB}$, dir, buradan P noktasının AB doğru parçasını A'dan B'ye doğru $\frac{1}{2}$, oranında, Q noktası ise 2 oranında böldüğü sonucuna varırız, (Şekil 8).

Genellikle, “M noktası AB doğru parçasını A'dan B'ye doğru λ oranında böler” demek yerine, “M noktası AB doğru parçasını λ oranında böler” deriz, AB etiketinin BA değil, A'dan B'ye bölündüğünü gösterdiğini varsayarak.

M noktası sadece A ve B noktaları arasında olduğu durumda λ sayısı sıfırdan büyüktür. Özellikle, ise, M noktası AB doğru parçasının orta noktasıdır. M noktası A noktası ile çakıştığı durumda $\lambda = 0$ dir. $\lambda = -1$ olduğu durumda $\overline{AM} = -\overline{MB}$ gerekir ve bu ise mümkün değildir. Dolayısıyla $\lambda \neq -1$ dir. λ sayısı sıfırdan küçük ve $\lambda \neq -1$ ise ve ancak

o zaman M noktası AB doğru parçasının dışında, yani uzantısında olarak, AB doğrusu üzerinde bulunur.



Şekil 9

Uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan doğru parçasını λ oranında bölen $M(x, y)$ noktasının koordinatlarını bulalım (şekil 9). $AM = \lambda MB$ 'den $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ ve $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$ elde edilir. O halde: $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ ve $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$ elde edilir. Oradan da

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ ve } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

elde edilir. $\lambda = \frac{p}{q}$ ise,

$$x = \frac{qx_1 + px_2}{p + q} \text{ ve } y = \frac{qy_1 + py_2}{p + q}$$

elde edilir. Özel durumda M noktası AB doğru parçasının orta noktası ise, $\lambda = 1$ olur ve:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

formülü elde edilir.

Alıştırma 3. Köşelerinin koordinatları $A(-2, -3)$, $B(6, 1)$ ve $C(-4, 5)$ olan ABC üçgeni veriliyor. Üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm. Ağırlık merkezinin koordinatlarını bulmak için, ağırlık merkezinin her bir kenarortayı AA_1 , BB_1 ve CC_1 'i 2 oranında böldüğü koşulunu kullanacağız.

$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \text{ ve } y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \text{ olduğundan, } A_1(2, -1) \text{ elde}$$

ederiz. O halde, $x_T = \frac{x_A + 2x_{A_1}}{1 + 2} = \frac{-4 + 4}{3} = 0$ ve $y_T = \frac{y_A + 2y_{A_1}}{1 + 2} = \frac{-3 - 2}{3} = -1$ elde edilir.

Demek ki, ağırlık merkez noktasının koordinatları için $T(0, -1)$ elde edilir.

Alıştırmalar

1. A(3, -7), B(5, 2) ve C(-1, 0) bir üçgenin köşeleri olsun. Kenarlarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

2. A(1, 1), B(5, 11) ve C(3, -1) bir üçgenin köşeleri olsun. A köşesinden çizilen kenarortayın uzunluğunu bulunuz.

3. A(3, 1) ve B(8, 3) noktaları veriliyor. AB doğru parçasını şu oranlarda bölen M noktasının koordinatlarını bulunuz:

a) 2 : 3 b) 3 : 2 c) -2 : 3 d) -3 : 2.

4. Kenarlarının orta noktaları P(3, -2), Q(1, 6) ve R(-4, 2) olan ABC üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

5. A(a₁, a₂), B(b₁, b₂) ve C(c₁, c₂) noktaları bir üçgenin köşelerinin koordinatları olsun. Üçgenin ağırlık merkezi için $T\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$ geçerli olduğunu kanıtlayınız.

4.3. Üçgenin Alanı

Köşelerinin koordinatlarıyla M₁(x₁, y₁), M₂(x₂, y₂) ve M₃(x₃, y₃) verilmiş olan bir üçgenin alanını hesaplayalım. Bu işlemi iki adımda çözmek daha kolay olur.

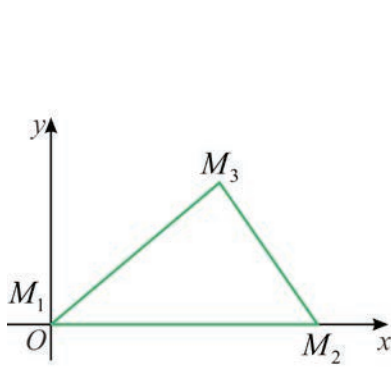
I. Adım. Öncelikle, bir köşe noktası koordinat başlangıcı ve diğer köşe noktası x ekseninde olan bir üçgenin alanını bulacağız (şekil 10). O zaman üçüncü köşe noktası x ekseninin üzerinde veya altında bulunur. Üçgenin alanının taban uzunluğu ile yüksekliğin yarısının çarpımına eşit olduğu formülü kullanarak, üçgenin alanının

$$P = \frac{|x_1 y_2|}{2}$$

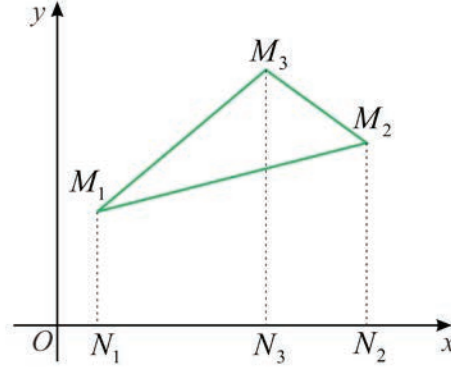
Formülüyle hesaplanır, burada mutlak değer kullanıyoruz çünkü alan pozitif bir büyüklüktür ve x veya y pozitif veya negatif olabilir.

II. Adım. Genel durumda (şekil 11), köşe noktaları M₁(x₁, y₁), M₂(x₂, y₂) ve M₃(x₃, y₃) olan bir üçgenin alanı, N₁N₃M₃M₁ ve N₃N₂M₂M₃ yamuklarının alanlarının toplamından N₁N₂M₂M₁ yamuğunun alanı çıkarılarak hesaplanır ve şu ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} P &= \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3) - \frac{y_2 + y_1}{2}(x_2 - x_1) = \\ &= \frac{1}{2}[y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)]. \end{aligned}$$



Şekil 10



Şekil 11

Eğer M_3 noktası M_1 ve M_2 noktaları tarafından belirlenen doğrunun altındaysa, üçgenin alanı için negatif bir değer elde ederiz, bu nedenle alan pozitif bir büyüklük olduğundan mutlak değer kullanmalıyız.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)| = \\ &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|. \end{aligned}$$

Alıştırma 1. Köşe noktaları $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$ ve $C(0, 5)$ olan bir üçgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm. Üçgenin alanını hesaplama formülüne göre:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \\ &= \frac{1}{2} |1 \cdot (3 - 5) - 2 \cdot (5 - 2) + 0 \cdot (2 - 3)| = 4 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, üçgenin alanı 4 birimdir.

Alıştırmalar

1. Köşelerinin koordinatları $A(-3, 2)$, $B(3, 5)$ ve $C(1, -3)$ olan bir üçgenin alanını hesaplayınız.

2. $R(-3, -3)$, $P(3, 5)$ ve $P(6, 9)$ noktaları bir üçgenin köşeleri midir?

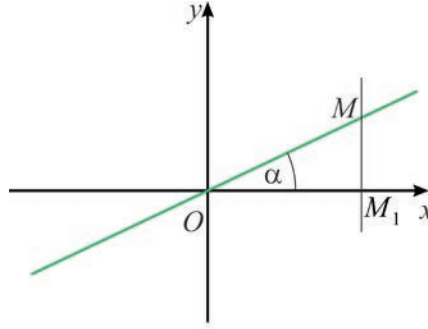
3. $M(1, -3)$, $B(3, 5)$ ve $C(2, 1)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olup olmadığını kontrol ediniz.

4. Köşelerinin koordinatları $A(0, 1)$, $B(3, 7)$, $C(4, 4)$ ve $D(1, -2)$ olan ABCD paralelkenarının alanını bulunuz.

5. Köşelerinin koordinatları $A(1, 4)$, $B(5, 3)$, $C(-3, -5)$ ve $D(-2, 1)$ olan ABCD yamuğunun alanını hesaplayınız.

4.4. Doğru Denkleminin Açık Biçimi

Doğru, tanımlanmayan temel bir geometrik kavram olduğundan, denklemine ulaşmak için bazı özelliklerini kullanmamız gerekir. İlk olarak, koordinat başlangıcından geçen ve koordinat eksenlerinden farklı olan bir doğrunun denklemini belirtelim (şekil 1).



Şekil 1

$M(x, y)$ noktası, koordinat başlangıcından farklı olan doğrunun herhangi bir noktası olsun. M noktasının x eksenine üzerindeki dik izdüşümünü M_1 ile ve doğrunun x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açıyı α ile gösterelim. O zaman

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

oranı, M noktasının herhangi bir konumu için sabittir. Bu oran k ile gösterilir ve **doğrunun eğimi** veya **doğrultman katsayısı** olarak adlandırılır. Buradan, doğrunun her noktasının koordinatları

$$y = kx.$$

denklemini sağladığını elde ediyoruz.

Bu nedenle, son denklem koordinat başlangıcından geçen ve x ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan bir doğrunun denklemdir, burada $k = \operatorname{tg} \alpha$ 'dır.

Alıştırma 1. Koordinat başlangıcından geçen ve x ekseninin pozitif yönü ile $\alpha = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm. Doğru koordinat başlangıcından geçtiği için denklemini $y = kx$ şeklindedir. Ödevin koşulundan $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ elde edilir. Demek ki, aranan denklemin $y = x$ olduğunu buluyoruz.

Koordinat düzleminde herhangi bir doğru verilsin. O zaman aşağıdaki üç durum mümkündür:

- Doğru her iki koordinat eksenini de keser (şekil 2). $N(0, m)$, doğrunun y eksenini kestiği nokta olsun. Bu durumda, doğrunun herhangi bir noktasının ordinatı, koordinat başlangıcından geçen doğrunun noktalarına göre eğer m pozitifse m kadar daha büyüktür veya m negatifse m kadar daha küçüktür ve verilen doğruya paraleldir.

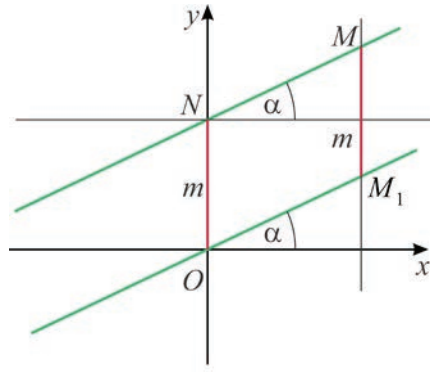
İncelenen iki doğru, x - ekseninin pozitif yönü ile eşit açılar yaptığından, eğimleri eşittir. Koordinat başlangıcından geçen doğrunun denklemi

$$y = kx$$

denklemi ile verildiğinden, verilen doğrunun denklemi

$$y = kx + m$$

şeklinde olacaktır. Burada k , verilen doğrunun eğimi, m ise y - ekseninden kesilen doğru parçasıdır. Elde edilen denklem **doğrunun açık biçimidir**, dolayısıyla doğru **açık biçimde** verilmiştir denir.



Şekil 2

Alıştırma 2. $M(2, -3)$ ve $N(5, 6)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm. Verilen noktaların farklı apsis ve ordinatları vardır, bu nedenle aranan doğrunun denklemi $y = kx + m$ şeklindedir, burada k doğrunun eğimi ve m y ekseninden kesilen doğru parçasıdır. Ödevin koşuluna göre, $M(2, -3)$ ve $N(5, 6)$ noktaları doğrunun noktalarıdır, bu nedenle koordinatları $y = kx + m$ denklemini sağlar. Bu şekilde $\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$ sistemini elde ederiz. Sistemin çözümü $k = 3$ ve $m = -9$ olduğunu buluyoruz. Buna göre, aranılan doğrunun denklemi $y = 3x - 9$ 'dur.

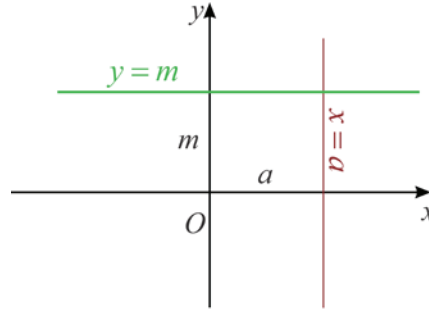
Eğimin geometrik anlamını ve doğrunun açık biçimli denklemindeki ordinat ekseninin kesişim noktasını göz önünde bulundurarak şunları söyleyebiliriz:

- a)** İki doğrunun eğimleri ancak eşit olduğu durumda paraleldirler;
- b)** İki doğru ordinat eksenini ancak ve ancak aynı noktada keselerse, onların ordinat ekseninden kestikleri doğru parçaları birbirine eşittir.
- Doğru x eksenine paraleldir veya x - eksenini ile çakışır (şekil 3). O zaman doğrunun tüm noktaları x - ekseninden eşit uzaklıktadır. Bir noktanın x -ekseninden uzaklığı aslında ordinatı olduğundan, verilen doğrunun tüm noktalarının ordinatları

birbirine eşit olduğu sonucuna varabiliriz. Eğer bu uzaklığı m ile gösterirsek, doğrunun denklemi

$$y = m$$

şeklini alır. Bu doğrunun konumu, bir önceki durumun özel bir durumu olarak ele alınabilir. Yani, bu durumda doğru x - ekseninin pozitif yönü ile $\alpha = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ açısını yapar, bu nedenle eğim $k = 0$ 'dır. Özel olarak, x - ekseninin denklemi $y = 0$ dir.



Şekil 3

• Doğru y -eksenine paraleldir veya y - eksenini ile çakışır (şekil 3). O zaman doğrunun tüm noktaları y -ekseninden eşit uzaklıktadır. Bir noktanın y -ekseninden uzaklığı aslında apsisi olduğundan, verilen doğrunun tüm noktalarının apsilerinin birbirine eşit olduğu sonucuna varabiliriz. Eğer bu uzaklığı a ile gösterirsek, doğrunun denklemini

$$x = a$$

biçiminde yazabiliriz. Özel durumda, y eksenini $x = 0$ denklemi ile verilir.

Alıştırma 3. Koordinat düzleminde $x = 2$ ve $y = 3$ doğrularının durumu nasıldır?

Çözüm. $x = 2$ doğrusu y eksenine paraleldir ve her noktası y ekseninden 2 birim uzaklıktadır, $y = 3$ doğrusu ise x eksenine paraleldir ve her noktası x ekseninden 3 birim uzaklıktadır.

Alıştırmalar

1. $M(-1, 1)$, $N(2, -3)$ ve $P(2, 2)$ noktalarının $y = -x + 4$ doğrusunun noktaları olup olmadığını kontrol ediniz.

2. Koordinat başlangıcından geçen ve x ekseninin pozitif yönü ile verilen açıyı yapan doğrunun denklemini belirtiniz:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ c) $\alpha = \pi$.

3. Verilenlere göre, doğrunun eğimini ve y -ekseninden kestiği doğru parçasını belirtiniz:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -x + 3$ c) $y = -2$ ç) $y = \sqrt{3}x$.

4. x ekseninin pozitif yönü ile $\alpha = \frac{\pi}{3}$ açısı yapan ve ordinat ekseninden kestiği doğru parçası $-\frac{1}{2}$ e eşit olan doğrunun denklemini yazınız.

5. A(-3, 2) noktasından geçen ve x ekseninin pozitif yönü ile $\alpha = 135^\circ$ açı yapan doğrunun denklemini yazınız.

4.5. Doğru Denkleminin Genel Şekli

Önceki derste, koordinat düzlemindeki bir doğrunun denklemi için x ve y değişkenlerine göre birinci dereceden bir denklem elde ettik. Bu derste, iki değişken x ve y değişkenli genel bir birinci dereceden denklemin, yani

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Belirteceğiz. Burada $A \neq 0$ veya $B \neq 0$ olduğunu varsayıyoruz. Gerçekten de, $A = B = 0$ ise, verilen denklem $C = 0$ denklemine indirgenir. Bu durumda, $C \neq 0$ ise, düzlemde denklemi sağlayan nokta yoktur, $C = 0$ ise, düzlemdeki tüm noktalar denklemi sağlar.

- $A = 0$ ise, o zaman $B \neq 0$, dolayısıyla (1) denklemi $y = -\frac{C}{B}$ denklemine denktir. Bildiğimiz gibi, düzlemde bu son denklemi sağlayan noktaların geometrik yeri, x eksenine paralel olan ve $M\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ noktasından geçen bir doğrudur.

- $B = 0$ ise, o zaman $A \neq 0$, dolayısıyla (1) denklemi $x = -\frac{C}{A}$ denklemine denktir. Düzlemde bu son denklemi sağlayan noktaların geometrik yeri, y eksenine paralel olan ve $N\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ noktasından geçen bir doğrudur.

- $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ ise, o zaman (1) denklemi, eğimi $k = -\frac{A}{B}$ ve y ekseninin kesişim noktası $m = -\frac{C}{B}$ olan açık biçimli bir doğru denklemine denktir.

Yapılan tartışmadan, $Ax + By + C = 0$ biçimindeki denklemin, **doğrunun genel şekli** olarak adlandırılan bir doğru denklemi olduğu sonucuna varabiliriz.

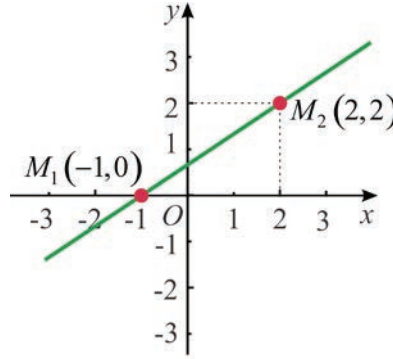
Alıştırma 1. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ doğrusunun denklemini genel biçime dönüştürünüz.

Çözüm. Verilen denklem, $\frac{1}{2}x + y - 3 = 0$ denklemine, yani $x + 2y - 6 = 0$ denklemine denktir.

Alıştırma 2. $3x + 3y - 5 = 0$ doğrusunun denklemini veriliyor. Verilen doğrunun x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açığı ve y ekseninden kesişim doğru parçasını bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemi y 'ye göre çözersek, verilen denkleme denk olan, yani düzlemde aynı doğruyu temsil eden $y = -x + \frac{5}{3}$, denklemini elde ederiz. $k = \tan \alpha = -1$ 'den $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ve $m = \frac{5}{3}$ elde ederiz.

Alıştırma 3. $2x - 3y + 2 = 0$ denklemi ile verilen doğruyu çiziniz.



Şekil 1

Çözüm. Verilen ödevi çözmek için, doğrunun iki noktasını belirtmek ve ardından bu noktalardan geçen doğruyu çizmek yeterlidir (şekil 1). x için rastgele herhangi iki değer seçeriz ve ardından y için karşılık gelen değerleri hesaplarız. Bu durumda, örneğin $x_1 = 2$ gibi seçilen bir değer uygun olacaktır, çünkü bu durumda y için tam sayı değeri, $y_1 = 2$ elde ederiz. Benzer şekilde, x için $x_2 = -1$ değerini seçebiliriz, buradan $y_2 = 0$ elde ederiz. Bu arada, seçilen x değerleri arasındaki farkın yeterince büyük olmasına dikkat etmeliyiz, böylece elde edilen noktalar birbirinden yeterince uzaklıkta olmalıdır.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki doğru denklemlerini genel biçime getirin:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = -4$

c) $x = 3$

2. Aşağıdaki doğruların eğimini ve ordinat ekseninden kestiği doğru parçasını bulunuz:

a) $2x - y + 3 = 0$

b) $5x + 2y - 3 = 0$

c) $3x + 8y + 16 = 0$

3. $x + y - 3 = 0$ doğrusunun denklemi veriliyor. Verilen doğrunun x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açığı ve y ekseninin kestiği doğru parçasının uzunluğunu bulunuz:

4. Aşağıdaki denklemlerle verilen doğruları çiziniz.

- a) $y = 3x + 1$ b) $x = \sqrt{2}$ c) $y = \pi$
 ç) $y = 2x + 2$ d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ e) $x = 0,5y - 1$.

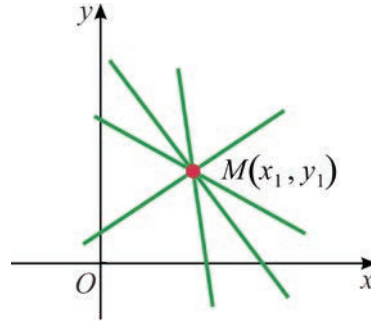
5. $Ax + By + C = 0$ doğrusunun x -ekseniyle oluşturduğu açı dar olduğuna göre, A ve B katsayılarının işaretlerini bulunuz.

4.6. Bir Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi

$M(x_1, y_1)$ koordinat düzleminde sabit bir nokta olsun (şekil 1). Verilen noktadan sonsuz sayıda doğru geçer ve her birinin

$$Ax + By + C = 0$$

biçiminde genel denklemi vardır.



Şekil 2

M noktası doğrunun üzerinde olduğundan, koordinatları doğrunun denklemini sağlar, yani

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

denklemi geçerlidir.

Elde edilen denklemi doğrunun denkleminde çıkarırsak,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

elde ederiz. Bu biçimdeki her denklem, koordinatları denklemi sağladığı için M noktasından geçen bir doğru denklemdir. A ve B katsayılarına farklı değerler vererek, M noktasından geçen farklı doğruların denklemlerini elde ederiz.

M noktasından geçen tüm doğrular arasında y eksenine paralel olan tek bir doğru vardır. Denklemi $x = x_1$ 'dir. Bu doğru eğime sahip değildir ve y ekseninde kesişim noktası yoktur, bu nedenle bu doğru açık biçimde verilemez. M noktasından geçen diğer her doğrunun

$$y = kx + m$$

açık biçimde yazılabilir.

M noktası doğrunun üzerinde olduğundan, koordinatları doğrunun denklemini sağlar, yani

$$y_1 = kx_1 + m$$

denklemini geçerlidir.

Elde edilen denklemi doğrunun denkleminden çıkarırsak,

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

elde ederiz.

Bu biçimdeki her denklem, koordinatları denklemini sağladığı için M noktasından geçen bir doğru denklemdir. k katsayısına farklı değerler vererek, y eksenine paralel olan doğru hariç M noktasından geçen farklı doğruların denklemlerini elde ederiz.

Alıştırma 1. $M(-3, 2)$ noktasından geçen ve x ekseninin pozitif yönü ile $\alpha = 135^\circ$ açısı yapan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm. M noktasından geçen herhangi bir doğrunun denklemini $y - 2 = k(x + 3)$ 'tür. İstenen doğru x eksenine ile $\alpha = 135^\circ$ açısı yaptığından, eğimi $k = \tan 135^\circ = -1$ 'dir. O halde istenen doğrunun denklemini $y - 2 = -(x + 3)$, yani $x + y + 1 = 0$ dır.

Alıştırma 2. $M(4, 6)$ noktasından geçen ve $3x + 2y - 25 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm. Verilen doğrunun denklemini genel biçimdedir. Açık biçime dönüştürürsek, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$ doğrusu denklemini elde ederiz ve eğimi $k = -\frac{3}{2}$ dir. İstenen doğru ve verilen doğru paralel olduğundan, x ekseninin pozitif yönü ile eşit açılar yaparlar, dolayısıyla eğimleri eşittir. Bu nedenle, istenen doğrunun denklemini $y - 6 = -\frac{3}{2}(x - 4)$, yani

$$3x + 2y - 24 = 0 \text{ dır.}$$

Alıştırmalar

1. $M(-2, 1)$ noktasından geçen ve eğimi $k = -3$ olan doğrunun denklemini yazınız.
2. $M(4, -7)$ noktasından geçen ve x ekseninin pozitif yönü ile $\alpha = 135^\circ$ açısı yapan doğrunun denklemini yazınız.
3. $M(7, -3)$ noktasından geçen ve aşağıdaki doğrulara paralel olan doğrunun denklemini yazınız:

$$\text{a) } y = -2x + 1 \quad \text{b) } y = x + \frac{1}{2} \quad \text{c) } y = \frac{3}{2}x + 1.$$

4. $M(3, -1)$ noktasından geçen ve aşağıdaki doğrulara paralel olan doğrunun denklemini yazınız:

- a) apsis eksenini ile b) $y = 3x$ doğrusu ile c) $y = x$ doğrusu ile

5. $M(1, -2)$ noktasından geçen ve aşağıdaki doğrulara paralel olan doğrunun denklemini yazınız:

- a) $x + y - 5 = 0$ b) $3x + 6y - 1 = 0$ c) $x - 3y = 0$

4.7. İki Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi

Bir noktadan geçen doğrunun denklemini kullanarak, verilen iki noktadan geçen doğrunun denklemini kolayca bulabiliriz.

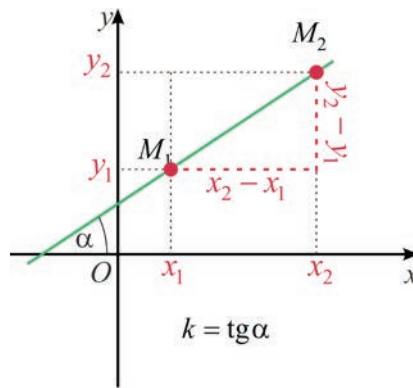
Örnek 1. $M_1(-12, 5)$ ve $M_2(8, -3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazalım.

M_1 merkezli doğruların demeti $y - 5 = k(x + 12)$ denklemine sahiptir. İstenen doğru M_2 noktasından geçtiğinden, koordinatları doğrunun denklemini sağlar, yani $-3 - 5 = k(8 + 12)$ denklemi geçerlidir. Buradan $k = -\frac{2}{5}$ elde ederiz. Bu nedenle, istenen doğrunun denklemi $y - 5 = -\frac{2}{5}(x + 12)$, yani

$$2x + 5y - 1 = 0$$

elde edilir.

İncelediğimiz örnek, iki nokta ile verilen bir doğrunun denklemini bulma prosedürünü ortaya koymaktadır. $M_1(x_1, y_1)$ ve $M_2(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun (Şekil 1). Verilen noktalardan geçen doğrunun, yani M_1M_2 doğrusunun denklemini bulacağız.



Şekil 1

- Eğer $x_1 = x_2$ ise, o zaman M_1M_2 doğrusu x eksenine diktir, bu durumda denklemi

$$x = x_1$$

şeklindedir.

- Eğer $x_1 \neq x_2$ ise, o zaman M_1 noktasından geçen herhangi bir doğrunun denklemi

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

şeklinde dir. M_1M_2 doğrusu M_2 noktasından geçtiğinden, koordinatları

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

denkle mi sağlar. O halde M_1M_2 doğrusunun eğimi

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olduğ unu yazabiliriz. k değ erini doğ rular demetinin denkleminde yerine koyarsak, verilen **iki noktadan geçen doğ runun denklemini** elde ederiz:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Verilen iki noktadan geçen doğ runun denklemin den, üç noktanın doğ rusallık koş u-lunu elde edebiliriz. Yani, üçüncü bir $M_3(x_3, y_3)$ noktası, M_1 ve M_2 noktaları tarafından belirlenen doğ ru üzerinde bulunur ancak ve ancak koordinatları, verilen iki nokta tara-fından belirlenen doğ runun denklemini, yani şu denkle mi sağ larsa:

$$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)$$

Alıştırma 2. $A(-1, -2)$, $B(1, 3)$ ve $C(-2, 4)$ noktaları verilen bir üçgenin köşeleridir. Üçgenin kenarortaylarının denklemlerini belirtiniz.

Çözüm. BC , CA ve AB kenarlarının orta noktalarını sırasıyla L , M ve N ile gösterelim. O halde koordinatları için ş unları elde ederiz:

$$L\left(\frac{x_B + x_C}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7}{2}\right), \quad M\left(\frac{x_C + x_A}{2} = -\frac{3}{2}, \frac{y_C + y_A}{2} = 1\right) \text{ ve} \\ N\left(\frac{x_A + x_B}{2} = 0, \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\right).$$

$$AL \text{ kenarortayının eğimi } k_{AL} = \frac{y_L - y_A}{x_L - x_A} = \frac{\frac{7}{2} - (-2)}{-\frac{1}{2} - (-1)} = 11.$$

O halde denkle mi $y - y_A = 11(x - x_A)$, yani $11x - y + 9 = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde, BM kenarortayının denkle mi $4x - 5y + 11 = 0$ ve CM kenarortayının denkle mi $7x + 4y - 2 = 0$ olduğunu elde ederiz.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki noktalardan geçen doğ runun eğimini bulunuz:

- a)** $M_1(-1, 4)$ ve $M_2(4, -3)$ **b)** $M_1(0, -2)$ ve $M_2(-1, 3)$ **c)** $M_1(1, 4)$ ve $M_2(-2, 4)$

2. $M_1(-1, 4)$ ve $M_2(4, -3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.
3. $M_1(0, 3)$, $M_2(2, 6)$ ve $M_3(-1, -3)$ noktaları doğrusal mıdır?
4. $A(2, -1)$, $B(4, 5)$ ve $C(-3, 2)$ ise, ABC üçgeninin ağırlık merkezinden ve koordinat başlangıcından geçen doğrunun denklemini yazınız.
5. $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ ve $C(0, 4)$ noktaları verilen bir üçgenin köşeleridir. Her biri bir köşeden geçen ve karşı tarafa paralel olan doğruların denklemlerini bulunuz.

4.8. Doğrunun Eksen Parçaları Şeklinden Denklemi

Daha önce gördüğümüz gibi,

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

denklemi koordinat düzleminde bir doğrunun denklemidir. Bu arada, doğru ancak ve ancak $C = 0$ ise koordinat başlangıcından geçer. A katsayısı ancak ve ancak doğru x eksenine paralelse sıfırdır, B katsayısı ise ancak ve ancak doğru y eksenine paralelse sıfırdır.

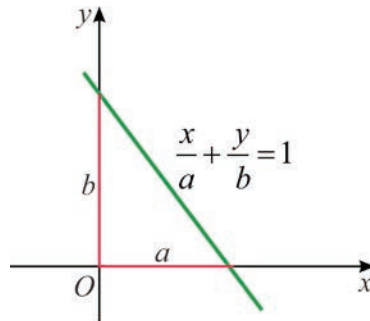
Verilen doğrunun koordinat başlangıcından geçmediğini ve hiçbir koordinat eksenine paralel olmadığını varsayalım. O zaman denkleminin katsayıları için $A \neq 0$, $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ geçerlidir. (1) denklemini $-\frac{1}{C}$ sayısı ile çarparsak

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0 \text{ veya } \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

elde edilir. $a = -\frac{C}{A}$ ve $b = -\frac{C}{B}$ alırsak,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme **doğrunun eksen parçaları şeklinden denklemi** denir.



Şekil 1

a ve b parametrelerinin geometrik anlamını inceleyelim. (2) denkleminde $y = 0$ ve ardından $x = 0$ koyarsak, doğrunun x eksenini ve y eksenini ile kesişim noktalarını sırasıyla $P(a, 0)$ ve $Q(0, b)$ elde ederiz. Bu nedenle, a ve b sayıları mutlak değer olarak, doğrunun sırasıyla x eksenini ve y ekseninden kestiği doğru parçalarının uzunluklarına eşittir. Bunlara **eksen parçaları** veya **eksen kesitleri** denir (Şekil 1).

Alıştırma 1. Aşağıdaki doğru denklemlerini eksen parçaları biçiminde yazınız:

a) $x - 3y - 6 = 0$ **b)** $y = 3x - 4$

ve ardından koordinat ekseninden kesilen doğru parçalarının uzunluklarını bulunuz.

Çözüm. a) I. Yol: Verilen doğru denklemi genel biçimdedir.

Denklemi $-\frac{1}{C} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$ ile çarparsak, $\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$ denklemini elde ederiz. Bu denklem,

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1$$

denklemi ile denktir ve aynı zamanda eksen parçaları cinsinden yazılmıştır.

II. Yol: Verilen denklemde $A = 1$, $B = -3$ ve $C = -6$ 'dır. O zaman $a = -\frac{C}{A} - \frac{-6}{1} = 6$ ve $b = -\frac{C}{B} = -\frac{-6}{-3} = -2$, elde ederiz, bu da denklemin eksen parçaları biçiminde olan

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Denklemdir. Dolayısıyla x ekseninden kesilen doğru parçasının uzunluğu 6 birim, y ekseninden kesilen doğru parçasının uzunluğu ise 2 birimdir.

b) Verilen denklemi genel biçime $2x - y - 4 = 0$ olarak dönüştürürüz ve ardından önceki durumda olduğu gibi, doğru denklemini eksen parçaları biçiminde

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1.$$

yazarız. Buna göre, doğrunun x ekseninden ayırdığı doğru parçası 2 birim, y -ekseninden kesilen doğru parçasının uzunluğu ise 4 birimdir.

Alıştırma 2. $2x - 5y - 10 = 0$ doğrusu ve koordinat eksenleri tarafından sınırlanan üçgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm. Koordinat eksenleri dik açıyla kesiştiğinden, istenen üçgen, dik açılı köşesi koordinat başlangıcında olan bir dik üçgendir, dik kenarları koordinat eksenlerinde, hipotenüsü ise verilen doğru üzerindedir. Dik üçgenin alanının, dik kenarlarının uzunluklarının çarpımının yarısına eşit olduğunu biliyoruz, bunlar da koordinat eksenlerinde kesilen doğru parçalarının uzunluklarıdır. Doğru denklemini eksen parçaları biçimine dönüştürürsek,

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1.$$

denklemini elde ederiz. Buna göre, eksenlerden kesilen doğru parçalarının uzunlukları 5 birim ve 2 birimdir, dolayısıyla istenen dik üçgenin dik kenarları 5 birim ve 2 birimdir. O halde alanı

$$P = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

birim kare olduğunu buluyoruz.

Alıştırma

1. Verilen doğru denklemlerini eksen parçaları biçiminde yazınız:

a) $3x - 2y + 12 = 0$ b) $y = -x + 1$ c) $y = 4x - 2$

ve ardından her bir koordinat eksenindeki kestiği doğru parçaların uzunluklarını bulunuz.

2. $2x + 5ky - 3 = 0$ doğrusunun koordinat eksenlerinde kestiği doğru parçalarının toplamı 10 olduğuna göre, k parametresinin değerini bulunuz.

3. $x + 2y - 6 = 0$ doğrusu ve koordinat eksenleri tarafından sınırlanan üçgenin alanını hesaplayınız.

4. $M(3, 2)$ noktasından geçen ve koordinat eksenlerinden eşit uzunlukta doğru parçaları kesen bir doğru çiziniz.

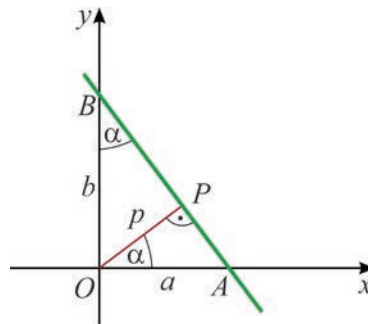
5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ doğrusu koordinat eksenleriyle yaptığı açılar aşağıdaki şıklarda verilmiştir. Doğrunun koordinat eksenlerinden kestiği a ve b doğru parçalarını karşılaştırınız:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$.

4.9. Doğru Denkleminin Normal Şekli

Bu derste, koordinat düzleminde koordinat başlangıcından geçmeyen ve hiçbir koordinat eksenine paralel olmayan bir doğru tanımlamanın başka bir yolunu öğreneceğiz.

Koordinat başlangıcından verilen doğruya bir dikme indiririz ve OP doğru parçasının uzunluğunu p ile ve bu dikmenin x eksenine yaptığı açiyı α ile gösteririz (Şekil 1).



Şekil 1

OAP ve BOP dik üçgenlerinden şunları elde ederiz:

$$a \cos \alpha = p \quad \text{ve} \quad b \sin \alpha = p$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ eksen parçaları cinsinde verilen doğrunun denkleminde

$$a = \frac{p}{\cos \alpha} \quad \text{ve} \quad b = \frac{p}{\sin \alpha}$$

ile değiştirirsek, sadeleştirmeden sonra denklem

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

şekline dönuşür. Buna **denklemin normal şekli** denir.

α açısı, doğrunun normalinin x -ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açıdır ve p , doğrunun koordinat başlangıcından uzaklığıdır. α açısı sabit ise, p 'nin farklı değeri için, x -ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan doğruya dik olan bir paralel doğrular ailesi elde ederiz. Doğru genel biçimde

$$Ax + By + C = 0$$

denklemini ile verildiğinde, doğrunun normal biçimini nasıl belirleyeceğimiz sorusu ortaya çıkar. Verilen denklemi, **normlaştırmacı çarpan** olarak adlandırılan ve

$$M \cdot A = \cos \alpha \quad \text{ve} \quad M \cdot B = \sin \alpha$$

bağıntılarını sağlayan bir $M \neq 0$ reel sayısı ile çarpacağız.

Son iki denklemi karelerini alıp toplarsak,

$$(MA)^2 + (MB)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

elde ederiz, buradan $M^2(A^2 + B^2) = 1$, yani

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

sonucu elde edilir.

Normlaştırmacı çarpan M 'nin işaretini $M \cdot C = -p$ koşulundan buluruz. Son denklemi $p = -M \cdot C$ biçiminde yazacağız. p pozitif olduğundan, M 'nin işareti MC ifadesi pozitif olacak şekilde seçilmelidir. Bu nedenle, normlaştırmacı çarpan M 'nin işareti C 'nin işaretinin tersi olmalıdır. Bu şekilde doğrunun normal biçimindeki denklemini elde ederiz:

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Alıştırma 1. $3x - 4y + 10 = 0$ doğrusunun denklemini normal biçimde yazınız.

Çözüm. Verilen doğru nun denklemi, $A = 3$, $B = -4$ ve $C = 10$ katsayılarına sahip genel biçimde bir denklemdir. C katsayısı pozitif olduğundan, denklemi şu sayı ile çarpıyoruz:

$$M = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

O halde verilen doğrunun normal biçimindeki denklemi şu şekildedir:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

Alıştırımlar

1. Aşağıdaki doğru denklemlerinden hangisi normal biçimde bir doğru denklemini temsil eder?

- a) $3x - 2y + 7 = 0$ b) $x + \frac{1}{2}y - 3 = 0$ c) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}y - 1 = 0$
 ç) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$ d) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$ e) $x - 5 = 0$.

2. Aşağıdaki denklemlerin normlaştırıcı çarpanını bulunuz:

- a) $2x - y - 3 = 0$ b) $x + 10y - 33 = 0$ c) $x + 4y + 10 = 0$

3. Aşağıdaki doğru denklemlerini normal biçimde yazınız:

- a) $4x - 3y + 10 = 0$ b) $5x + 12y - 39 = 0$ c) $6x + 8y - 15 = 0$
 ç) $x - 2y + 3 = 0$ d) $y - \sqrt{3}x = 4$ e) $x \cos 10^\circ + y \sin 10^\circ + 4 = 0$.

4. Aşağıdaki doğru denklemlerini normal biçimde yazınız:

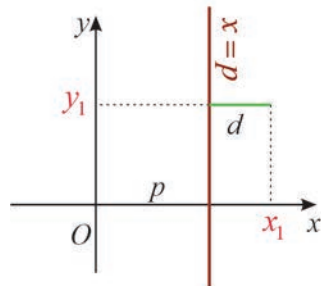
- a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ b) $\frac{x}{5} = y - 2$ c) $y = x - 3$.

4.10. Bir Noktadan Doğruya Uzaklık

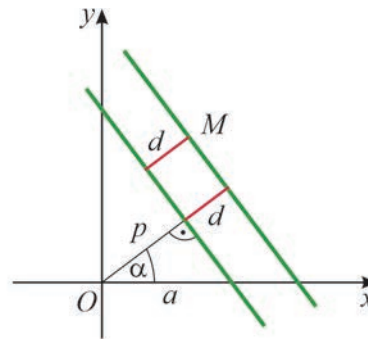
Bir sonraki görevimiz, koordinat düzleminde verilen bir noktadan verilen bir doğruya uzaklığı hesaplamaktır. Bildiğimiz gibi, bir noktadan bir doğruya uzaklık, noktadan doğruya indirilen dikmenin uzunluğuna eşittir.

- Doğru x eksenine dik ise, $M(x_1, y_1)$ noktasından $x = p$ doğrusuna olan uzaklık $d = |x_1 - p|$ 'dir (Şekil 1).

- Doğru genel durumda olsun (Şekil 2). Verilen $M(x_1, y_1)$ noktasından verilen doğruya paralel bir doğru çizeriz. O zaman M noktasından doğruya olan uzaklık, paralel doğrular arasındaki uzaklığa eşit olacaktır.



Şekil 1



Şekil 2

- Verilen doğrunun denklemini

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

normal biçimde yazarsak, ona paralel olan doğrunun denklemi

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0,$$

olur, burada p_1 , doğrunun $M(x_1, y_1)$ noktasından geçtiği koşulundan belirlenir, yani

$$p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha.$$

$M(x_1, y_1)$ noktasının doğruya olan uzaklığı, paralel doğrular arasındaki uzaklığa eşittir, yani $d = |p - p_1| = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|$ ya da

$$d = |x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha - p|$$

elde edilir. Son eşitlikten, verilen noktadan doğruya olan uzaklığın, doğrunun normal biçimindeki

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

denkleminin sol tarafında, yani noktanın koordinatlarını yerine koyarak ve ardından elde edilen sayının mutlak değerini alarak elde edildiği sonucudur. Bu arada, ifadenin işareti aşağıdaki geometrik anlama sahiptir:

- Noktadan doğruya olan uzaklık, mutlak değer alınmadan önce pozitif bir sayı ise, o zaman nokta ve koordinat başlangıcı doğrunun farklı taraflarındadır;
- Noktadan doğruya olan uzaklık, mutlak değer alınmadan önce negatif bir sayı ise, o zaman nokta ve koordinat başlangıcı doğrunun aynı tarafındadır.

Doğru denklemi genel biçimde

$$Ax + By + C = 0$$

Verildiği durumda, denklemi normal biçime dönüştürmemiz gerekir, yani normlaştırmacı çarpan olan

$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

ile çarpmamız gerekir. Normlaştırmacı çarpanın işareti, C katsayısının işaretinin tersi olacak şekilde seçilir. O zaman verilen noktadan doğruya olan uzaklık, doğrunun normal biçimindeki denkleminin sol tarafında, yani

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Denkleminde, noktanın koordinatlarını yerine koyarak ve ardından elde edilen sayının mutlak değerini alarak elde edilir. Sonuç olarak,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

elde ederiz.

Alıştırma 1. $A(2, 1)$ ve $B(-2, 4)$ noktalarının $4x - 3y + 15 = 0$ doğrusuna olan uzaklıklarını bulunuz.

Çözüm. Verilen noktadan doğruya olan uzaklığı bulmak için, öncelikle denklemi normal biçime dönüştürmemiz gerekir. Bu amaçla denklemi normlaştırıcı çarpan ile çarpalım:

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\pm 5}.$$

Normlaştırıcı çarpanın işareti, C katsayısının işaretinin tersi olacak şekilde seçilir, bu durumda $M = -\frac{1}{5}$ 'dir. O halde doğrunun normal denklemi şu şekildedir:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

Şimdi verilen noktanın koordinatlarını yerine koyarsak, şunu elde ederiz:

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 1 - 3 \right| = |-4| = 4.$$

Mutlak değer almadan önce d 'nin işareti negatif olduğu için, A noktası ve koordinat başlangıcı doğrunun aynı tarafındadır.

Benzer şekilde, B noktası için şunu elde ederiz:

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot (-2) + \frac{3}{5} \cdot 4 - 3 \right| = |1| = 1.$$

Bu durumda, mutlak değer almadan önce d 'nin işareti pozitif, bu nedenle B noktası ve koordinat başlangıcı doğrunun farklı taraflarındadır.

Alıştırma 2. Düzlemdeki hangi noktalar $x - y + 1 = 0$ doğrusuna $d = \sqrt{2}$ uzaklıktadır?

Çözüm. $M(x, y)$ noktasının $x - y + 1 = 0$ doğrusuna $d = \sqrt{2}$ uzaklıkta olması için şu koşul geçerli olmalıdır:

$$\frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

yani $|x - y + 1| = 2$ elde edilir. Buradan $x - y + 1 = -2$ ya da $x - y + 1 = 2$ elde ederiz.

Bu nedenle, $x - y + 1 = 0$ doğrusuna $\sqrt{2}$ uzaklıkta olan noktalar $y = x - 1$ ve $y = x + 3$ doğrularının noktalarıdır.

Alıştırmalar

1. $A(-5, -1)$ noktasının $4x + 3y + 30 = 0$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz. Verilen nokta ve koordinat başlangıcı doğrunun aynı tarafında mıdır?

2. $9x - 12y + 10 = 0$ doğrusunun koordinat başlangıcına olan uzaklığını bulun.
3. $M(-3, 1)$ ve $N(5, 4)$ noktalarından hangisinin $x - 2y - 5 = 0$ doğrusuna daha yakın olduğunu belirleyin. Verilen doğrunun MN doğru parçasını kesmediğini gösterin.
4. $A(3, 5)$, $B(7, -4)$ ve $C(-11, -13)$ ise ABC üçgeninin yüksekliklerini bulun.
5. $C(4, 3)$ noktasından 5 birim uzaklıkta olan ve koordinat eksenlerinden eşit doğru parçaları kesen doğrunun denklemini bulunuz.
6. $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ doğrusuna paralel olan doğruların hepsinden, $A(2, 3)$ noktasından 5 birim uzaklıkta olan doğruyu bulun.

4.11. İki Doğrunun Karşılıklı Durumları

Bildiğimiz gibi, düzlemde iki doğru kesişebilir, paralel olabilir veya çakışabilir. Koordinat düzleminde genel denklemleriyle

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

verilen iki doğru olsun. Verilen denklemlerle tanımlanan sistemin katsayılarına bağlı olarak aşağıdaki üç durum mümkündür.

- Eğer $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ ise, yani

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

ise, o zaman sistemin tek bir çözümü vardır:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

yani verilen doğrular (x_0, y_0) noktasında kesişir.

Alıştırma 1. $2x - y - 5 = 0$ ve $x + 3y + 1 = 0$ doğrularının kesiştiğini gösteriniz ve kesişim noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm. $2x - y - 5 = 0$ ve $x + 3y + 1 = 0$ doğrularının denklemlerinde $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $C_1 = -5$ ve $A_2 = 1$, $B_2 = 3$, $C_2 = 1$ 'dir. Buradan şu sonuca varırız:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} = \frac{B_1}{B_2}$$

bu da doğruların kesiştiği anlamına gelir. Kesişim noktasının koordinatları şunlardır:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot (-5)}{2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1} = \frac{16}{7}, \quad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{-1 \cdot (-5) - 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1} = \frac{3}{7}. \blacklozenge$$

- Eğer $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$ ve $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$, ise, yani

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

ise, o zaman sistemin çözümü yoktur, yani doğrular **paraleldir**.

- Eğer $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ ve $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, ise, yani

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ise, o zaman sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır, yani doğrular **çakışık**tır.

Alıştırmalar 2. Aşağıdaki doğruların durumunu inceleyiniz:

a) $3x - 2y + 5 = 0$ ve $9y - 6x - 1 = 0$ paralel midirler;

b) $4x + 2y - 3 = 0$ ve $8y + 4x - 6 = 0$ çakışık mıdır?

Çözüm. a) $\frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} \neq \frac{5}{-1}$ ‘dan, doğruların paralel olduğu sonucu elde edilir.

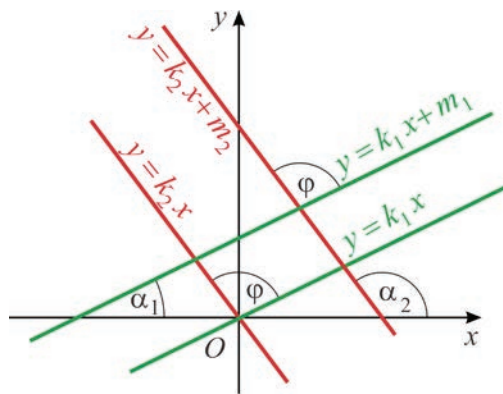
b) $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$ ‘dan doğruların çakışık olduğu sonucu elde edilir.

Devamında, iki doğru arasındaki açının nasıl hesaplanacağını öğreneceğiz ve iki doğrunun diklik koşulunu türeteceğiz. Verilen iki doğru arasındaki açı, doğrular açık denklemleriyle verildiğinde en kolay şekilde hesaplanır:

$$y = k_1x + m_1 \text{ ve } y = k_2x + m_2.$$

Doğruların kesiştiği ϕ açısı, doğruların ötelendiğinde değişmediğinden, verilen doğruların yaptığı açı, şu doğruların yaptığı açılara eşittir (Şekil 1):

$$y = k_1x \text{ ve } y = k_2x.$$



Şekil 1

O halde $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ ’dir. Eşitliğin her iki tarafına da tanjant uygularsak, şunu elde ederiz:

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

$$tg\alpha_1 = k_1 \text{ ve } tg\alpha_2 = k_2$$

olduğunu bildiğimize göre,

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

elde ederiz.

İki doğrudan biri y -eksenine paralel olduğu durumda, aralarındaki açı $\frac{\pi}{2} - \alpha'$ dir, burada α diğer doğrunun x -ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açıdır.

Alıştırma 3. $y = 2x - 3$ ve $3x + y - 2 = 0$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm. İlk doğrunun eğimi $k_1 = 2$ ve ikinci doğrunun eğimi $k_2 = -3$ 'tür. Bu nedenle,

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3 - 2}{1 + 2 \cdot (-3)} = 1 \text{ dir, oradan da } \phi = \frac{\pi}{4} \text{ sonucunu elde edilir.}$$

Doğrular dik ise, o zaman $k_2 = tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$ 'dir, yani $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ elde edilir. Bu nedenle, **iki doğrunun dik olma şartı** için şu formülü elde etmiş oluyoruz:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

İki doğrudan biri y -eksenine paralel olduğunda, ancak ve ancak diğer doğru x -eksenine paralel ise onlar birbirine dik durumda olur.

Alıştırma 4. $M(-1, 1)$ noktasından geçen ve $3x - y + 2 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini belirtiniz.

Çözüm. M noktasından geçen doğrular demetinin denklemi $y - 1 = k(x + 1)$ 'dir. Verilen doğruya, yani $y = 3x + 2$ doğrusuna dik olan demetten doğrunun denklemini belirlememiz gerekir. İki doğrunun diklik koşulundan $k = -\frac{1}{3}$ elde edilir. Bu nedenle, istenen doğrunun denklemi

$$x + 3y - 2 = 0 \text{ 'dır.}$$

Alıştırma 5. ABC üçgeninin BC , CA ve AB kenarlarının doğrularının denklemleri sırasıyla $3x - 5y + 15 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$ ve $5x + y - 3 = 0$ 'dır. Üçgenin yüksekliklerinin denklemlerini belirtiniz.

Çözüm. AB ve AC kenarlarının denklemlerinden şu sistemi oluşturuyoruz:

$$\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemin çözümü $x = 1$ ve $y = -2$ dir. Bu nedenle, A köşesinin koordinatları $A(1, -2)$ 'dir. Benzer şekilde, $B(0, 3)$ ve $C(-5, 0)$ 'ı elde ederiz.

$A(1, -2)$ köşesinden BC kenarına indirilen üçgenin yüksekliği AA_1 'in denklemi $y + 2 = k(x - 1)$ 'dir. BC kenarının üzerinde bulunduğu doğrunun eğimi $k_{BC} = \frac{3}{5}$ 'tir. Bu ise, AA_1 yüksekliğinin üzerinde bulunduğu doğruya diktir. Bu nedenle, $k = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{5}{3}$ 'tür. O halde AA_1 yüksekliğinin denklemi

$$y + 2 = -\frac{5}{3}(x - 1), \text{ yani } 5x + 3y + 1 = 0 \text{ 'dır.}$$

B ve C köşelerinden indirilen yüksekliklerin üzerinde bulunduğu doğruların denklemlerini benzer şekilde elde ederiz.

Alıştırma

1. Aşağıdaki doğrulardan hangilerinin kesiştiğini, hangilerinin paralel olduğunu ve hangilerinin çakıştığını belirleyin. Doğrular kesişiyorsa, kesişim noktasını bulunuz.

a) $3x - 2y + 1 = 0$ ve $2x + 5y - 12 = 0$

b) $3x + y - 17 = 0$ ve $6x + 2y + 12 = 0$

c) $2x - y + 3 = 0$ ve $6x - 3y + 9 = 0$

2. Çakışan $Ax - 4y - 2 = 0$ ve $2x - By + 1 - B = 0$ doğrularının A ve B katsayılarının değerlerini bulunuz.

3. $A(-2, 3)$ noktasından geçen ve $5x - 6y + 7 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

4. $2x - y + 7 = 0$ ve $3x + y + 10 = 0$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

5. Aşağıdaki doğrulardan hangileri birbirine diktir:

a) $2x - 3y = 0$ ve $3x + 2y = 0$

b) $x - 2 = 0$ ve $y + 5 = 0$

c) $y = x + b$ ve $y = -x$

ç) $x - 2y + 1 = 0$ ve $2x - y = 0$

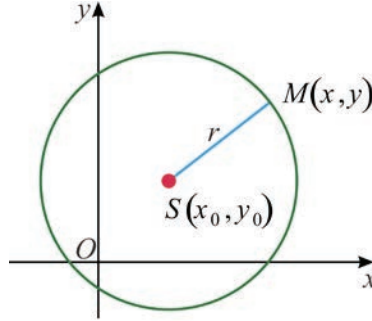
d) $5x - 6y + 7 = 0$ ve $6x + 5y - 1 = 0$

e) $x + y = 2$ ve $y = x + 3$

6. $A(3, 15)$ noktasından geçen ve $3x - 5y + 8 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini belirtiniz.

4.12. Çember

Tanım. Çember, düzlemdeki sabit bir S noktasından eşit uzaklıkta bulunan tüm noktaların geometrik yeridir.



Çizim 1

S noktasına çemberin **merkezi** denir. Çember üzerindeki herhangi bir M noktası için, SM doğru parçasına **çemberin yarıçapı** denir. Genellikle, SM doğru parçasının uzunluğuna da çemberin **yarıçapı** denir.

Seçilen bir xOy koordinat düzlemine göre çemberin denklemini tanım yardımıyla bulacağız (Şekil 1).

Merkezi $S(x_0, y_0)$ noktasında olan çember üzerindeki herhangi bir $M(x, y)$ noktası için, $\overline{SM} = r$ dir. İki nokta arasındaki uzaklık formülüne göre:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

elde edilir. Bu denklemden de,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

denklemini elde edilir. bu ise, merkezi (x_0, y_0) noktasında ve yarıçapı r olan **çemberin normal denklemdir**.

Özel olarak, çemberin merkezi koordinat başlangıcında ise, denklem

$$x^2 + y^2 = r^2$$

şekline dönüşür ve buna **çemberin merkezli denklemi** denir.

Alıştırma 1. Merkezi $S(5, 4)$ noktasında ve yarıçapı $r = 8$ olan çemberin denklemini belirtiniz.

Çözüm. İstenen denklem $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 64$ 'tür.

Çemberin denklemini genişletilmiş biçimde yazarsak, şu denklemi elde ederiz:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

veya

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0,$$

burada $l = -2x_0$, $m = -2y_0$ ve $n = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ 'dir, bu ikinci dereceden bir denklemdir.

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ biçimindeki ikinci dereceden bir denklemin ne zaman bir çember denklemi olduğu sorusu sorulabilir? $l^2 + m^2 - 4n = 4x_0^2 + 4y_0^2 - 4(x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 4r^2$ olduğundan, şu sonuçlara varabiliriz:

- Eğer $l^2 + m^2 - 4n > 0$ ise, o zaman $4r^2 > 0$, yani $r > 0$, bu da verilen denklemin merkezi $S\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ ve yarıçapı r olan bir çember denklemi olduğu anlamına gelir;
- Eğer $l^2 + m^2 - 4n = 0$ ise, o zaman $4r^2 = 0$, yani $r = 0$, bu da verilen denklemin $S\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ noktasının denklemi olduğu anlamına gelir;
- Eğer $l^2 + m^2 - 4n < 0$ ise, o zaman $4r^2 < 0$, bu mümkün değildir. Bu durumda, düzlemde koordinatları verilen denklemi sağlayan noktalar yoktur.

Alıştırma 2. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$ denkleminin bir çember denklemi olduğunu ispatlayınız ve ardından merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm. I. Yol: Verilen denklemde $l = -6$, $m = 10$ ve $n = 18$ 'dir.

$$l^2 + m^2 - 4n = (-6)^2 + 10^2 - 4 \cdot 18 = 64 > 0$$

eşitsizliğinden, verilen denklemin bir çember denklemi olduğu elde edilir. $l = -2x_0$, $m = -2y_0$ ve $n = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ den $x_0 = 3$, $y_0 = -5$ ve $r = 4$ elde ederiz, yani verilen denklem $S(3, -5)$ merkezli ve $r = 4$ yarıçaplı bir çemberin denklemidir.

II. Yol: Verilen denklemi, $x^2 - 6x$ ve $y^2 + 10y$ ifadelerini tam kareye tamamlayacak şekilde dönüştürürüz. O zaman verilen denklem $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 9 - 25 + 18 = 0$, yani

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

biçimini alır; buradan verilen çemberin merkezinin $S(3, -5)$ noktası ve yarıçapının $r = 4$ olduğunu görüyoruz.

Alıştırma 3. $A(2, -2)$, $B(7, 3)$ ve $C(6, 0)$ noktalarından geçen çemberin denklemini belirtiniz.

Çözüm. Verilen her noktanın koordinatlarını $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ denkleminde yerine koyarsak, şu sistemi elde ederiz:

$$\begin{cases} 2l - 2m + n = -8 \\ 7l + 3m + n = -58 \\ 6l + n = -36 \end{cases}$$

Ve bunun çözümü $l = -4$, $m = -6$ ve $n = -12$ 'dir. İstenen çember denklemi $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, yani
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$. ♦

Alıştırmalar

1. Merkezi $S(0, 0)$ noktasında ve yarıçapı $r = 5$ olan çemberin denklemini bulunuz.
2. Aşağıdaki denklemlerle verilen çemberlerin merkezlerinin koordinatlarını ve yarıçaplarını yazınız:

a) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$	b) $x^2 + y^2 + 12x - 16y + 64 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 70x - 24y = 0$	ç) $x^2 + y^2 + 60x + 60y = -900$
3. Merkezi $S(-3, -2)$ noktasında olan ve koordinat başlangıcından geçen çemberin denklemini bulunuz.
4. $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$ çemberiyle ortak merkezli olan ve $A(-3, 4)$ noktasından geçen çemberin denklemini bulunuz.
5. Aşağıdaki noktalardan geçen çemberin denklemini yazınız:

a) $A(7, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-2, 4)$	b) $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $C(3, -1)$
---------------------------------------	---------------------------------------

4.13. Doğru ve Çemberin Karşılıklı Durumları

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ denklemiyle verilen bir çember ve $Ax + By + C = 0$ genel denklemiyle bir doğru verilmiş olsun. Verilen doğru, çemberi iki noktada, bir noktada keser veya çemberle ortak noktası yoktur, bu da aşağıdaki sistemin

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

iki, bir veya sıfır çözümü olmasına bağlıdır. O zaman doğrunun sırasıyla çemberi kestiğini, çembere teğet olduğunu veya doğru çemberi kesmediğini söyleriz.

Temel geometriden bildiğimiz gibi: Çemberin merkezinden doğruya olan uzaklık çemberin yarıçapından küçükse, doğru çemberi keser; çemberin merkezinden doğruya olan uzaklık çemberin yarıçapına eşitse, doğru çembere teğettir; ve çemberin merkezinden doğruya olan uzaklık çemberin yarıçapından büyükse, doğru çemberi kesmez. Noktadan doğruya olan uzaklık formülünü kullanarak, şunu elde ederiz:

- Doğru, çemberi iki noktada keserse, $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} < r$ 'dir.
- Doğru, çembere teğet ise, $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r$ 'dir.
- Doğru, çemberi kesmezse, $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > r$ 'dir.

Alıştırma 1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ çemberinin $x + y - 5 = 0$ doğrusu ile kesişim noktalarını bulunuz.

Çözüm. $\frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} < 2$ koşulundan, doğrunun çemberi kestiği sonucu elde edilir. Kesişim noktalarının koordinatları, hem doğrunun denklemini hem de çemberin denklemini sağlar. O halde, kesişim noktalarının koordinatlarını belirtmek için şu sistemi çözüyoruz:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

İlk denklemde $y = 5 - x$ yerine koyarsak, kökleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ olan $x^2 - 4x + 3 = 0$ denklemini elde ederiz. O zaman, ikinci denklemden y için $y_1 = 4$ ve $y_2 = 2$ elde ederiz. Bu nedenle, verilen doğru çemberi $(1, 4)$ ve $(3, 2)$ noktalarında keser.

Alıştırmalar

1. $x - y - 4 = 0$ doğrusunun $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ çemberi ile ortak noktalarını bulunuz.
2. $3x + y + 2 = 0$ doğrusunun $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ çemberinden kestiği kirişin uzunluğunu bulunuz.

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Köşelerinin koordinatları $A(-5, 5)$, $B(7, -3)$ ve $C(3, 1)$ olan ABC üçgeninin çevresini hesaplayınız.
2. Verilenlere göre, AB doğru parçasını λ oranında bölen M noktasının koordinatlarını bulunuz:
 - a) $A(10, 3)$, $B(-2, -5)$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$
 - b) $A(-2, -5)$, $B(13, 5)$ ve $\lambda = \frac{3}{2}$.

- 3.** $A(1, 1)$, $B(-1, 3)$ ve $C(2, 0)$ noktaları aynı doğru üzerindedir. A noktasının CB doğru parçasını hangi oranda böldüğünü bulunuz.
- 4.** AB , BC ve CA doğru parçalarının üzerinde bulunduğu doğruların denklemleri sırasıyla $2x + 3y - 5 = 0$, $3x + 2y = 0$ ve $4x + y - 5 = 0$ 'dır. M noktası BC doğru parçasını $\lambda = 2$ oranında böler. AM doğrusunun denklemini bulunuz.
- 5.** $M_1(-7, 2)$ ve $M_2(3, -5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.
- 6.** $A(1, 9)$, $B(-2, 3)$ ve $C(-5, -3)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu ispatlayınız.
- 7.** $A(-2, -1)$, $B(1, 2)$ ve $C(-1, 4)$ noktaları veriliyor. $ABCD$ paralelkenar ise D noktasının koordinatlarını yazınız.
- 8.** $A(3, 3)$, $B(-2, 3)$ ve $C(-1, 0)$ noktaları veriliyor. ABC üçgeninin ikizkenar olduğunu ispatlayınız.
- 9.** $M(2, 3)$ noktasının aşağıdaki doğrulara olan uzaklığı d' yi bulunuz:
a) $3x + 4y - 25 = 0$ **b)** $12x - 5y + 4 = 0$
- 10.** Köşelerinin koordinatları $A(3, 2)$, $B(5, 4)$ ve $C(1, 4)$ olan ABC üçgeninin kenarortaylarının denklemlerini yazınız.
- 11.** Köşelerinin koordinatları $A(-8, 1)$, $B(1, 2)$ ve $C(-5, -3)$ olan ABC üçgeninin T ağırlık merkezinin koordinatlarını yazınız.
- 12.** $A(-2, -2)$, $B(7, 1)$ ve $C(3, 3)$ noktaları veriliyor. Aşağıdakileri bulunuz:
a) AB doğru parçasının uzunluğunu,
b) C noktasının AB doğrusuna olan uzaklığını,
c) ABC üçgeninin alanını.
- 13.** İki kenarı $5x - 12y - 65 = 0$ ve $5x - 12y + 26 = 0$ doğruları üzerinde bulunan bir karenin alanını hesaplayınız.
- 14.** $M(-3, 8)$ noktasından geçen ve koordinat eksenleri ile alanı $P = 6$ olan bir üçgen oluşturan doğrunun denklemini yazınız.
- 15.** İkizkenar bir üçgenin tabanı $x - 2y + 3 = 0$ doğrusu üzerinde, bir kenarı $4x + y + 5 = 0$ doğrusu üzerinde ve diğer kenarı $P\left(\frac{6}{5}, \frac{28}{5}\right)$ noktasından geçiyor.
a) Verilen üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını yazınız.
b) Üçgenin alanını hesaplayınız.

16. $ABCD$ dörtgeninin AB , BC , CD ve DA kenarları sırasıyla $5x + y + 13 = 0$, $2x - 7y - 17 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$ ve $3x - 4y + 17 = 0$ denklemleriyle veriliyor. Verilen dörtgenin köşegenlerinin üzerinde bulunduğu doğruların denklemlerini belirtiniz.

17. Çapı, $3x - 4y + 12 = 0$ doğrusunun koordinat eksenleri arasındaki doğru parçası olduğu çemberin denklemini yazınız.

18. Merkezi $x - y - 2 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve $A(2, 3)$ ve $B(-4, -1)$ noktalarından geçen çemberin denklemini yazınız.

5. KOMBİNASYONLUK VE OLASILIK

Bu konuda, sonlu sayıda elemanı olan bir kümeden belirli koşullara göre tüm eleman gruplarını seçme yollarını ve bu tür oluşturulmuş tüm eleman gruplarının sayısını nasıl belirleyeceğimizi inceleyeceğiz.

5.1. Permütasyonlar

Tanım. Sonlu sayıda elemanı olan bir A kümesi verilmiş olsun. A kümesindeki tüm elemanların her farklı sıralanmasına **permütasyon** denir.

Bazı sıralanmalarda elemanların tekrar etmesi söz konusu olabilir, bu nedenle tekrarsız ve tekrarlı permütasyonlar vardır.

Tekrarsız Permütasyonlar

Verilen bir kümenin permütasyonlarının sayısını hesaplama yöntemini belirlemeden önce, bazı işaretlemeleri tanıtacağız ve somut bir örnek inceleyeceğiz.

A kümesinin n elemanı olsun. Kümenin elemanlarının tekrarsız permütasyonlarının sayısını $P(n)$ ile göstereceğiz.

Örnek 1. Verilen A kümesinin tekrarsız permütasyonlarının sayısını belirtiniz:

- a) $A = \{1, 2\}$ b) $A = \{1, 2, 3\}$ c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Çözüm. a) Bu iki elemanın iki farklı sıralanması mümkündür, yani 12, 21. Yani $P(2) = 2$ dir.

b) Elemanların altı farklı sıralanması mümkündür, yani 123, 132, 213, 231, 312 ve 321, bu nedenle $P(3) = 6$ dir.

Önce 1 rakamını seçersek, üç basamaklı sayıda 1 sayısı üç farklı yerde bulunabilir. 1 rakamının sabit bir seçimi için, 2 rakamı iki farklı yerde konumlandırılabilir. İki rakamın sabit bir seçimi için, son rakam yalnızca bir şekilde seçilebilir. Yani rakamların seçilebileceği yol sayısı $3 \cdot 2 \cdot 1$ 'dir.

c) Elemanların 24 farklı sıralanması mümkündür, yani

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Demek ki, $P(4) = 24$ ' tür.

Permütasyonların oluşturulma yöntemini inceleyelim. b) örneğinde yapıldığı gibi, 1 rakamı dört basamaklı sayıda dört farklı yere konumlandırılabilir. 1 sabitlenirse, 2 rakamı üç farklı yere yerleştirilebilir. 1 ve 2 rakamlarının sabit bir pozisyonu için, 3 rakamı iki farklı yere yerleştirilebilir. Son olarak 1, 2 ve 3 rakamlarının sabit bir pozisyonu için, 4 rakamı yalnızca bir şekilde seçilebilir. Dolayısıyla tüm sıralanmaların sayısı $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 'dir.

Genel olarak, n elemanlı bir küme için, ilk elemanı n yere, ikinciye $n - 1$ yere vb., son elemanı 1 yere yerleştirebiliriz. Yani n elemanın farklı sıralanmasının (permütasyonlarının) sayısını $n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ çarpımı yardımıyla hesaplayacağız.

$n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sayısına **n faktöriyel** denir ve $n!$ ile gösterilir.

Tanım gereği $0! = 1$ olduğunu varsayıyoruz.

Yukarıdakilere göre, n elemanlı bir kümenin **tekrarsız permütasyonlarının** sayısı $P(n) = n!$ 'dir.

Örnek 2. 0, 1, 2, 3, 4 rakamlarından kaç farklı beş basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. 5 rakamdan $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ beş basamaklı sayı oluşturulabilir. Bu sayıdan, ilk rakamı 0 olan permütasyonların sayısını, yani $P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ 'ü çıkarmamız gerekiyor. Yani, verilen beş rakamdan oluşan beş basamaklı sayıların sayısı: $P(5) - P(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$ 'dır.

Tekrarlı Permütasyonlar

Tekrarlı permütasyonların sayısını belirleyeceğimiz formülü belirtmeden önce, aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2. Her sayıda 1 rakamı üç kez ve diğer rakamlar yalnızca bir kez görünecek şekilde, 1, 2, 3 rakamlarından oluşturulabilecek tüm beş basamaklı sayıların sayısını belirtiniz.

Çözüm. Bu tür tüm beş basamaklı sayıları listeleyelim:

11123, 11132, 11213, 11231, 11312, 11321, 12311, 12131, 12113,

13211, 13121, 13112, 21113, 21131, 21311, 23111, 31112, 31121, 31211, 32111.

İstenen özelliğe sahip toplam 20 farklı beş basamaklı sayı elde ettik. Farklı rakamlarla yazılmış tüm beş basamaklı sayıların sayısı $P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ 'dir. Bu durumda, 1 rakamı her beş basamaklı sayıda üç kez görüldüğü için, bu 120 sayıda aynı olanlar olacaktır. Aynı sayılar, 1 rakamının üç aynı yerde permütasyonları için elde edilir ki bu da $P(3) = 3!$ dir. İstenen özelliğe sahip tüm farklı beş basamaklı sayıların sayısını $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ bölümünden elde edeceğiz.

Bir elemanın k kez tekrar ettiği ($k \leq n$) ve diğerlerinin her birinin tam olarak bir kez tekrar ettiği n elemanın permütasyonlarının sayısı $P_k(n) = \frac{n!}{k!}$ formülü ile belirtilir. Bu permütasyonlara **tekrarlı permütasyonlar** denir.

Genel olarak, bir elemanın k_1 kez, ikincinin k_2 kez, ..., m -inci elemanın k_m kez tekrar ettiği **n elemanın tüm tekrarlı permütasyonlarının** sayısı $P_{k_1, k_2, \dots, k_m}(n)$ ile gösterilir. Bu tür permütasyonlarda $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$ olduğunu not ediyoruz ve tüm permütasyonların sayısı $P_{k_1, k_2, \dots, k_m}(n) = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_m!}$ ile hesaplanır.

Örnek 3. 1 ve 2 rakamlarından, 1 rakamı 3 kez ve 2 rakamı 2 kez tekrarlanacak şekilde kaç beş basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. Bu tür tüm beş basamaklı sayıları listeleyelim: 11122, 11212, 12112, 21112, 11221, 12121, 21121, 12211, 21211, 22111, yani istenen sayı $P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

Alıştırma 1. 1, 2, 3 ve 4 rakamlarından, 1 rakamı iki kez, 2 rakamı üç kez ve 3 ve 4 rakamları birer kez tekrarlanacak şekilde kaç yedi basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. İstenilen sayı $P_{2,3}(7) = \frac{7!}{2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 420$.

Alıştırma 2. 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5 rakamlarından kaç sekiz basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. $P_{2,3,3}(8) = \frac{8!}{2!3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$.

Alıştırmalar

1. Bir kütüphanedeki bir rafta 5 farklı kitap kaç farklı şekilde düzenlenebilir?
2. 6 öğrenci bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilir?
3. 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 rakamlarından 4 ile başlayan kaç altı basamaklı sayı oluşturulabilir?
4. Her biri tam olarak bir kez yazılacak şekilde 2, 3 ve 4 rakamlarını içeren tüm üç basamaklı sayıların toplamı kaçtır?

5.2. Varyasyonlar

Tekrarsız Varyasyonlar

Varyasyon kavramını incelemeden önce bir örneğe bakalım.

Örnek 1. Bir satranç olimpiyatında, 3 kişilik takımlar o şekilde oluşturulmalıdır ki, birinin birinci tahtada, diğerinin ikinci tahtada ve üçüncünün üçüncü tahtada oynayacaktır. 6 satranç oyuncusundan oluşan bir takımdan kaç farklı üç kişilik takım oluşturulabilir?

Çözüm. Oyuncuları 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 ile işaretleyelim. Takımın ilk üyesinin seçimi 6 şekilde yapılabilir. İlk üye olarak 2 numaralı oyuncu seçilmiş olsun. O zaman ikinci üye 1, 3, 4, 5 ve 6 numaralı oyunculardan seçilebilir, yani bu 5 şekilde yapılabilir. Bu, ilk iki oyuncunun seçiminin $6 \cdot 5 = 30$ şekilde yapılabileceği anlamına gelir. İlk iki oyuncu için 2 ve 4'ü seçtiysek, o zaman üçüncü oyuncu için 1, 3, 5 ve 6'den birini seçme seçeneğimiz

vardır, yani bunu 4 şekilde yapabiliriz. Demek ki, 6 satranç oyuncusundan oluşan bir takımdan 3 kişilik bir takım $30 \cdot 4 = 120$ şekilde oluşturulabilir.

Bu alıştırmayı çözerken, 6 farklı elemandan $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ farklı sıralı üçlü oyuncu oluşturabileceğimizi fark ettik.

Tanım. A , n elemanlı bir küme olsun. A kümesinin farklı elemanlarının sıralı her k -lısı, $k \leq n$ için, n **elemanın k sınıflı tekrarsız varyasyonu** olarak adlandırılır.

n elemanlı bir kümenin k sınıflı bir varyasyonunun aynı zamanda o n elemanlı kümenin bir permütasyonu olduğunu not ediyoruz.

İki varyasyon birbirinden farklıdır, eğer en az birer farklı elemanı varsa veya farklı bir sırayla sıralanmış aynı elemanlara sahipse.

n elemanlı k sınıflı varyasyonlarının sayısı V_n^k ile gösterilir.

Alıştırma 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 rakamlarından, hiçbir rakamın tekrarlanmadığı kaç dört basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. Dört basamaklı sayının ilk rakamı 7 şekilde, ikincisi 6 şekilde, üçüncüsü 5 şekilde ve dördüncüsü 4 farklı şekilde seçilebilir. Bu nedenle, istenen dört basamaklı sayıların sayısı $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ 'tır.

Bir k -lıdaki ilk elemanın n şekilde, ikincisinin $n - 1$ şekilde vb. seçilebileceğini dikkate alarak, k -ıncı elemanın $n - (k - 1)$ şekilde seçilebileceğini, dolayısıyla n elemanın k sınıflı varyasyonlarının sayısının şu şekilde elde ederiz:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)).$$

$$n! = n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots(n-k-1)\dots2 \cdot 1 = \\ = n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)! \text{ olduğundan,}$$

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ elde edilir.}$$

Buna göre, $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ formülü, n **elemanın k -sınıflı varyasyonlarının sayısıdır.**

Alıştırma 2. Bir öğrencinin günde 5 farklı derse girmesi gerekiyorsa, 9 ders kaç şekilde düzenlenebilir?

Çözüm. 9 dersin günde 5'erli farklı düzenlemelerinin sayısı, aslında 9 elemanın 5'inci sınıflı varyasyonlarının sayısıdır. Buna göre, $V_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$.

Tekrarlı Varyasyonlar

Tanım. Bir A kümesinin n **elemanının k -sınıflı tekrarlı varyasyonu**, o kümenin elemanlarının her sıralı k -lısıdır.

Örnek 2. 1, 3, 5 rakamlarından kaç iki basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. Bu ödevde her rakamın yalnızca bir kez bulunması gerekmediğini not ediyoruz. Bu nedenle, istenen iki basamaklı sayılar şunlardır: 11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55. Bunların sayısı $9 = 3^2$ 'dir.

n elemanlı bir kümenin k sınıflı tekrarlı varyasyonlarının sayısını belirlemek için, önce $k = 1$ sınıflı n elemanlı kümenin tüm varyasyonlarının sayısını inceleyelim. Bu sayı n 'dir, yani incelenen kümenin eleman sayısına eşittir. $k = 2$ sınıflı tüm varyasyonları, önceki sınıftaki her varyasyona kümedeki her elemanın eklenmesiyle elde edilecektir. Bu şekilde $n \cdot n = n^2$ varyasyon elde edilir. Benzer şekilde, k sınıflı varyasyonlarının sayısı, $k - 1$ sınıflının her varyasyonuna kümedeki her elemanın eklenmesiyle elde edilecektir. Bu nedenle, n **elemanın k -sınıflı tüm tekrarlı varyasyonlarının sayısı** $\bar{V}_n^k$ ile gösterilir ve $\bar{V}_n^k = n^k$ formülü ile belirlenir.

Alıştırma 3. a, b, c, d, e elemanlarının 4 sınıflı tekrarlı varyasyonlarının sayısı kaçtır?

Çözüm. $\bar{V}_5^4 = 5^4 = 625$.

Alıştırma 4. 1, 3, 5 rakamlarından kaç beş basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm. $\bar{V}_3^5 = 3^5 = 243$ olduğuna göre, aranan türden 243 beş basamaklı sayı oluşturulabilir.

Alıştırmalar

1. Mile, arkadaşının telefon numarasının altı farklı rakamdan oluştuğunu biliyordu ve ilk üç rakamı hatırlıyordu. Arkadaşının numarasını tahmin etmek için telefonda kaç rakam seçmesi gerekiyor?

2. 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarından farklı rakamlarla kaç dört basamaklı sayı yazılabilir?

3. V_8^3 ve $\bar{V}_8^5$ 'ün değerlerini belirleyiniz.

4. $V_m^2 = 42$ ise p 'nin değerini belirleyiniz.

5. $10 \cdot V_n^2 = V_{n+1}^4$ ise n 'yi bulunuz.

5.3. Kombinasyonlar

Tekrarsız Kombinasyonlar

Verilen bir kümedeki elemanları seçmenin bir sonraki yolunu incelemeden önce, aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 1. Bir matematik yarışmasına, bir okuldan üçer öğrenci içeren takımlar katılır. Bir okuldan kaç farklı takım oluşturulabilir, eğer takım seçimi toplam 6 öğrenciden yapılıyorsa?

Çözüm. Bu ödevde takım üyelerinin sırasının önemli olmadığını not ediyoruz. Öğrencileri 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 ile işaretleyelim. Tüm sıralı üçlülerin sayısı $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 'dir. Biz sadece üç elemanlı üçlüler, yani alt kümelerle ilgileniyoruz, sıralı üçlülerle değil. Bu nedenle, üç öğrenciden oluşan bir kümeden kaç farklı sıralı üçlü oluşturulabileceğini inceliyoruz. Bunlar 3 elemanın permütasyonları kadardır, yani $P_3 = 6$ 'dır. Buna göre, 6 öğrenciden oluşan 3 öğrencilik takımların sayısı, öğrencilerin takımdaki sıralaması dikkate alınmadan, $120 : 6 = 20$ olacaktır. Yani 20 farklı takım oluşturulabilir.

Tanım. A, n elemanlı sonlu bir küme ve $k \leq n$ olsun. A kümesinden k farklı elemanın her seçimine, n elemanın k -sınıflı tekrarsız kombinasyonu denir.

n elemanın k sınıflı tüm kombinasyonlarının sayısı C_n^k ile gösterilir.

Aslında, elemanların sırasının önemli olduğu n elemanın tüm alt kümelerinin seçimi, n elemanın k -sınıflı bir varyasyonunu verir, yani $C_n^k \cdot k! = V_n^k$ 'dir, dolayısıyla $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!}$ bölümünü basitleştirerek şunu elde ederiz:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Bu nedenle, n elemanın k -sınıflı tüm kombinasyonlarının sayısı

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

formülüyle hesaplanacaktır.

C_n^k genellikle, $\binom{n}{k}$ işaretiyle de gösterilir: “n üzerinde k” olarak okunur ve **binom katsayısı** olarak adlandırılır. Yani $C_n^k = \binom{n}{k}$ 'dir.

Alıştırma 1. a, b, c, d, e elemanlarının 1'den 5'e kadar sınıflarının tekrarsız kombinasyonlarının sayısını bulun.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm. } C_5^1 &= \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5, & C_5^2 &= \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, & C_5^3 &= \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10, \\ C_5^4 &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5, & C_5^5 &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$

Aşağıdaki özellikler basit kontrollerle kanıtlanabilir:

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} & \text{b) } \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 & \text{c) } \binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \\ \text{ç) } \binom{n}{k} &+ \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Alıştırma 2. C_{50}^{48} 'in değerini bulunuz.

Çözüm. $C_{50}^{48} = \binom{50}{48} = \binom{50}{50-48} = \binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2 \cdot 1} = 25 \cdot 49 . \blacklozenge$

Alıştırma 3. Herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan 8 noktadan kaç doğru oluşturulabilir?

Çözüm. Bir doğrunun iki nokta ile tanımlandığını ve AB doğrusunun BA doğrusu ile aynı olduğunu biliyoruz. Yani, 8 elemanın 2. sınıf kombinasyonları sözkonusu olduğunu, yani $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ doğru elde edilir.

Tekrarlı Kombinasyonlar

a, b, c elemanları verilmiş olsun. Bunlardan ikinci sınıflı 3 kombinasyon oluşturulabilir, yani $\{a, b, c\}$ kümesinin tam olarak iki elemanı olan üç alt kümesi vardır. Bunlar, elemanların sırasının önemli olmadığı ab, ac ve bc kombinasyonlarıdır. Elemanların tekrarlanmasına izin verirse kaç tane iki elemanlı kombinasyon oluşturulabileceğini görelim. Tüm bu kombinasyonları listeleyelim: aa, ab, ac, bb, bc ve cc . Bunların altı tane olduğunu görüyoruz.

Tanım. A , n elemanlı sonlu bir küme ve k doğal sayı olsun. Bazı elemanların birden çok kez seçilebildiği ve seçme sırasının önemli olmadığı A 'dan k elemanın her seçimine, n den k - sınıflı tekrarlı kombinasyonu denir.

Tekrarlı k -sınıflı tüm kombinasyonlarının sayısı $\overline{C}_n^k$ ile gösterilir.

Örnek 2. $\overline{C}_3^4$ sayısını belirtelim.

Çözüm. Üç eleman a, b, c seçiyoruz. Bu elemanlar için 4. sınıflı tüm tekrarlı kombinasyonlarını yazalım:

$aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc$.

Demek ki, $\overline{C}_3^4 = 15$ 'dir.

k -sınıflı n elemanın tekrarlı kombinasyonlarının sayısı için şu formül geçerlidir:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bu arada, sınıftaki eleman sayısı n 'den büyük olabilir, yani $k > n$.

Alıştırma 4. a, b, c, d, e, f elemanlarının 1'den 4'e kadar sınıflı tekrarlı kombinasyonlarının sayısını belirtiniz.

$$\begin{aligned}\overline{C}_6^1 &= \binom{6+1-1}{1} = \binom{6}{1} = 6, & \overline{C}_6^2 &= \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21, \\ \overline{C}_6^3 &= \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56, & \overline{C}_6^4 &= \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.\end{aligned}$$

Alıştırımlar

1. Bir altıgenin altı köşesinden kaç farklı üçgen oluşturulabilir?
2. $C_n^{n-2} = 10$. ise, n 'yi bulunuz.
3. Bir sekizgenin kaç köşegeni vardır?
4. $4C_n^2 = C_{n+2}^3$ ise, n 'yi bulunuz.
5. İkinci sınıf tekrarlı kombinasyonlardan 276 kombinasyon oluşturmak için en az kaç eleman gerekir?

5.4. Binom Formülü

Şu binomların çarpımını inceleyelim:

$$(x + a)(x + a) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)(x + a)(x + a) = (x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) = (x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

Son eşitlikteki 1, 4, 6, 4, 1 katsayıları, sırasıyla 4 elemandan 0, 1, 2, 3 ve 4. sınıf kombinasyonlarının sayısına eşittir, yani şu şekilde yazılabilirler:

$$C_4^0 = \binom{4}{0} = 1, \quad C_4^1 = \binom{4}{1} = 4, \quad C_4^2 = \binom{4}{2} = 6, \quad C_4^3 = \binom{4}{3} = 4, \quad C_4^4 = \binom{4}{4} = 1.$$

O halde bu eşitlik şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}(x + a)^4 &= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 = \\ &= \binom{4}{0}x^4a^0 + \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}xa^3 + \binom{4}{4}x^0a^4\end{aligned}$$

Benzer şekilde, 6 binomun çarpımından şu sonuca varırız:

$$\begin{aligned}(x + a)^6 &= x^6a^0 + \binom{6}{1}x^5a^1 + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \binom{6}{5}xa^5 + \binom{6}{6}x^0a^6 = \\ &= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6. \blacklozenge\end{aligned}$$

Önceki formüllerde katsayı olarak daha önce binom katsayıları olarak adlandırdığımız sayılar ortaya çıktı. İsimleri, her binomun herhangi bir kuvvetinin açılımındaki katsayılar olmalarından gelir.

Herhangi bir doğal sayı n ve a için, aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu ispatlanabilir:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}a^k + \dots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n.$$

Elde edilen formüle **binom formülü** denir ve $(x+a)^n$ biçimindeki herhangi bir binomun derecesini polinom biçiminde yazmanın basit bir yolunu sağlar.

Örnek 1.

$$\begin{aligned}(x-a)^5 &= (x+(-a))^5 = x^5 - \binom{5}{1}x^4a + \binom{5}{2}x^3a^2 - \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}xa^4 - \binom{5}{5}a^5 = \\ &= x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5. \blacklozenge\end{aligned}$$

$(x-a)$ binomu için binom formülü benzer şekilde elde edilir. Yani, a yerine $(-a)$ koyarsak, a 'yı içeren terimler, eğer a tek dereceli bir üsse sahipse negatif işarete ve eğer a çift dereceli bir üsse sahipse pozitif işarete sahip olacaktır, yani:

$$(x-a)^n = x^n - nx^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 - \dots (-1)^k \binom{n}{k}x^{n-k}a^k \pm \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + (-1)^n a^n$$

Örnek 2. $(y+2)^7$ kuvvetinin açılımındaki üçüncü terimi bulunuz.

Çözüm. $x = y$, $a = 2$ ve $n = 7$ için, binom formülünden

$$\binom{7}{2}y^{7-2} \cdot 2^2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}y^5 \cdot 4 = 84y^5. \blacklozenge$$

elde edilir.

Binom katsayıları, **Pascal üçgeni** adı verilen bir üçgende görsel olarak temsil edilebilir. İçinde, birler hariç her sayı, hemen üstündeki sayıların sol ve sağındaki sayıların toplamıdır. Bu aslında Pascal kuralıdır.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Binom formülünde $x = a = 1$ koyarsak şunu elde ederiz:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

k elemanlı kümelerin kombinasyonlarının sayısının, n elemanlı bir kümenin tüm k elemanlı alt kümelerinin sayısı olduğunu bildiğimiz için, önceki eşitliğe göre, n elemanlı bir kümenin 2^n alt kümesi olduğu sonucuna varırız.

Alıştırmalar

Aşağıdakileri binom formülü kullanarak açınız:

1. $(3 + 2x)^5$.

2. $(a + b - c)^3$.

3. $(1 - 2y)^6$.

4. $(3x + 1)^5$.

5. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4$.

6. $(\sqrt[3]{x} - 1)^4$.

7. $\left(x - \frac{y}{3}\right)^7$ kuvvetinin açılımındaki beşinci terimi bulunuz.

5.5. Klasik Olasılık

Olasılık teorisi, şans oyunları ile ilgili problemleri inceleyerek, ortaya çıkan matematiğin nispeten genç bir dalıdır. Matematik çerçevesinde ortaya çıkmasına rağmen, olasılık teorisi gerçek onayını, ortaya çıkması, varlığı ve ilişkileri önceden kesin olarak belirlenmemiş ve zaman ve mekanda değişmez olmayan çeşitli olayların ve bunların ilişkilerinin araştırılmasında istatistik çerçevesinde almıştır.

Olasılık teorisinde ve özellikle uygulamasında **deney ve olay** kavramları temel kavramlardır. Bu terimlerin ne anlama geldiğini açıklamak için birkaç örneği inceleyeceğiz.

Örnek 1. Bir madeni parayı havaya atarsak, bir düzleme düştükten sonra üst tarafında “yazı” veya “tura” görünecektir. Parayı bir düzleme atarak ve düşürerek, sonucu şu sonuçlardan biri olabilen bir “deney” gerçekleştirmiş oluruz:

- a) paranın üst tarafında “yazı” göründü,
- b) paranın üst tarafında “tura” göründü.

Örnek 2. Bir düzleme (masaya) iki zar atma “deneyini” inceleyelim. Bu deneyin sonucunu nasıl tanımlayabiliriz? Zarları numaralandırırsak, birini birinci (veya örneğin kırmızı renkte boyanmış) ve diğerini ikinci (mavi renkte boyanmış) olarak saymakla, bir yol belirtmiş oluyoruz. Her birinin üst tarafında görünen nokta sayısını yazarız. Bu anlamda, her sonuç, yani sonuç, (x, y) sıralı çifti olarak temsil edilebilir, burada x birinci zarda görünen nokta sayısı ve y ikinci zarda görünen nokta sayısıdır.

Bu şekilde, deneyin tüm olası sonuçları şu küme ile tanımlanabilir:

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Yani, çeşitli olayları incelerken, belirli bir koşullar kümesinin (madeni para atma, zar atma vb.) gerçekleşmesini gözlemleyebiliriz. **Deney** olarak, belirli bir koşullar kümesinin bir gerçekleşmesini anlayacağız.

Birden fazla sonuç mümkün olduğunda ve bu sonuçlardan hangisinin gerçekleşeceğini önceden belirleyemediğimizde, deneye **rastgele** deney diyoruz.

Olasılık teorisinin çalışma konusu, aşağıdaki koşulları sağlayan deneylerdir:

- aynı koşullar altında sınırsız sayıda tekrarlama imkanı (gerçek veya soyut);
- deneyin gerçekleştirilmesi sırasında olası sonuçların (çıktıların) kümesinin önceden bilinmesi;
- her deneyde olası sonuçlardan yalnızca birinin gerçekleşebilmesi.

Ancak, gerçekleşmesi veya sonucu kesin olarak belirlenmiş yasalara göre elde edilen deneyler de vardır. Bu tür deneylere **deterministik** deneyler denir.

Örnek 3. Deterministik deney örnekleri, Newton’un mekanik yasası ve Newton’un evrensel çekim yasasıdır. Bu deneylere dayanarak, geçmişte olanlar açıklanabilir ve gelecekte ne olacağı tahmin edilebilir.

Örnek 4. Ay veya Güneş tutulmasının gelecekte ne zaman gerçekleşeceği ve geçmişte ne zaman gerçekleştiği hesaplamalarla belirlenebilir.

Her rastgele deneye, o deneyin tüm olası sonuçlarının kümesi olan bir Ω kümesi atayabiliriz. Bu Ω kümesine **temel olaylar kümesi** veya **örneklem uzay** denir ve her elemanına **temel olay** veya **örneklem nokta** denir. Ω kümesinin her A alt kümesine **rastgele olay** veya sadece **olay** denir. Yani, Ω kümesi **kesin olaydır**, çünkü deney gerçekleştirildiğinde temel olaylardan biri her zaman gerçekleşir. Boş küme Ω ’nın bir alt kümesidir, ancak asla gerçekleşemez, bu nedenle bu **imkansız bir olaydır**. Ω ’nın her boş olmayan alt kümesi **olası bir olaydır**. Birkaç örnek deney, karşılık gelen temel olaylar uzayı ve rastgele olayları inceleyeceğiz.

Örnek 5. Bir madeni parayı havaya atma deneyinde, temel olaylar kümesi $\Omega = \{Y, T\}$ ’dir, burada Y , “madeni paranın üst tarafında yazı görüldü” olayını ve T , “madeni paranın üst tarafında tura görüldü” olayını gösterir.

Örnek 6. Deney, bir madeni parayı iki kez havaya atmaktan oluşur. Olayları inceleyelim:

- A: iki atışta da yazı geldi,
 - B: iki atışta da tura geldi,
 - C: ilk atışta yazı ve ikinci atışta tura geldi,
 - D: ilk atışta tura ve ikinci atışta yazı geldi.
- Bu deney için temel olaylar kümesi
 $\Omega = \{YY, TT, YT, TY\}$ kümesidir.

A olayı, ilk ve ikinci atışta yazının geldiğini, yani ilk ve ikinci atışta sonucu tek olarak belli bir şekilde belirlediğini gösterir. Aynı şey, sonucu ilk ve ikinci atışta tek olarak belli bir şekilde belirleyen B temel olayı için de geçerlidir.

Ω örneklem uzay kümesinin bu şekilde yazılmasıyla, ilk ve ikinci atışlardaki sonuçlar tek olarak belli bir şekilde belirlenir. $F = \{YY, TT\}$ olayı, her iki atışta da madeni paranın aynı tarafının geldiği rastgele olayı tanımlar. $G = \{YT, TY\}$ olayı ise her iki atışta da madeni paranın farklı tarafının geldiği rastgele olayı tanımlar.

Örnek 7. Kenarları 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarıyla işaretlenmiş bir zar iki kez havaya atılır. Örneklem uzay Ω kümesi aşağıdaki 36 sonuçtan oluşur:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Yazılan sonuçların 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemanlarının tekrarlı 2. sınıf varyasyonları olduğuna dikkat edin.

Örnek 8. 8'i beyaz ve 4'ü siyah olmak üzere $n = 12$ top içeren bir kutumuz olduğunu varsayalım. Tüm topların eşit olduğunu ve beyaz bir top çekmek istediğimizi varsayalım. Beyaz bir top çekersek, bu olumlu bir olaydır, siyah bir top çekersek, bu olumsuz bir olaydır.

Verilen bir deneyde tüm temel olayların eşit olasılıkta olduğunu varsayacağız.

Tanım. A olayının gerçekleşme olasılığı, olumlu örneklem (temel olayların) sayısının, o deney için temel olaylar kümesindeki tüm olası temel olayların sayısına oranıdır.

Bu nedenle, A olayının gerçekleşme olasılığını $P(A)$ ile, olumlu temel olayların sayısını m ile ve tüm olası temel olayların sayısını n ile gösterirsek, şunu elde ederiz:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Örnek 8'deki beyaz bir top çekme olayı A için $P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ olduğunu not etmek kolaydır.

Örnek 9. Bir oyun zarı havaya atıldığında, zarın üst tarafında beş nokta görünme olasılığı nedir?

Çözüm. Bu deneyde tüm temel olayların sayısı $n = 6$ 'dır ve sadece bir tanesi olumludur, yani $m = 1$ 'dir. A ile zarın üst tarafında beş nokta görünme olayını gösterirsek, $P(A) = \frac{1}{6}$ olur.

Örnek 10. Bir şans oyununda 500 kupon vardır ve bunlardan sadece 30'u ödül kazanır. Ödüllü bir kupon kazanma olasılığı nedir?

Çözüm. Tüm olası olaylar $n = 500$ 'dür, bunlardan 30'u olumlu olaylardır. Bu nedenle, A olayının olasılığı: ödüllü bir kupon kazanmaktır ve $P(A) = \frac{30}{500} = 0,06$ 'dır.

İncelenen örneklerden, A 'nın verilen bir deneyle ilgili bir olay olması ve Ω 'nın temel olaylar kümesi olması durumunda, her zaman $0 \leq P(A) \leq 1$ olduğunu görebiliriz.

Ayrıca:

- $P(\emptyset) = 0$, çünkü olay imkansızdır,
- $P(\Omega) = 1$, çünkü Ω kesin bir olaydır,

Alıştırma 1. Bir mağazada 50 bardaktan %6'sında küçük bir kusur vardı. 6 bardak satın alırsak, hiçbirinin kusurlu olmama olasılığı nedir? Satın alınan 6 bardağın tamamının kusurlu olma olasılığı var mıdır?

Çözüm. 50 bardaktan 6 bardağın satın alınması, 50 elemanın 6. sınıflı bir kombinasyondur. Bu nedenle, 50 farklı bardaktan 6 bardağın seçilebileceği tüm olası yolların sayısı şudur:

$$n = C_{50}^6 = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{6!}.$$

Bardakların %6'sında kusur olduğuna göre, 50 bardaktan 47'si kusursuzdur. O zaman, A olayının olumlu gerçekleşme sayısı, yani seçilen bardakların kusursuz olması, 47 elemanın 6. sınıflı kombinasyonlarının sayısına eşittir, yani:

$$m = C_{47}^6 = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{6!}.$$

Bu nedenle, 6 kusursuz bardak satın alma olasılığı şudur:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45} \approx 0,676.$$

Sadece üç bardak kusurlu olduğundan, 6 kusurlu bardak satın almak imkansız bir olaydır, yani olasılığı 0'dır.

Alıştırmalar

1. Bir okulda 400 öğrenci vardı. Bunlardan 48'i tüm derslerden pek iyi başarılı ve 160'ı pek iyi başarılı, fakat tüm derslerden değil. Karşılaşılabilecek ilk öğrencinin

- A: tüm derslerden pek iyi başarılı,
 B: pek iyi başarılı, fakat tüm derslerden değil
 olma olasılığı nedir?

2. İki madeni para havaya atıldığında ikisinin de tura gelme olasılığı nedir?
3. İki zar atıldığında ikisinin de 6 gelme olasılığı nedir?
4. İki zar atıldığında ikisinin de aynı sayı gelme olasılığı nedir?
5. 20'si erkek ve 10'u kız olmak üzere 30 öğrenciden oluşan bir gruptan rastgele 5 öğrenci seçilir. 5 erkek öğrencinin seçilmesi olayının gerçekleşme olasılığı nedir?
6. “matematik” kelimesinden rastgele bir harf seçilir. Seçilen harfin:
 - a) “A” harfi,
 - b) “T” harfi,
 - c) sesli harfolma olasılığı nedir?

5.6. Koşullu Olasılık

İki olay A ve B verilmiş olsun. Olaylarla ilgili birkaç işlem inceleyeceğiz:

Tanım. A ve B olaylarının çarpımı, hem A hem de B olaylarının gerçekleştiği zaman ve sadece o zaman gerçekleşen olaydır.

A ve B 'nin elemanter olay kümelerinin kesişimine ait tüm elemanter olayları içeren olaydır. A ve B olaylarının çarpımı AB ile gösterilir.

İki olay aynı anda gerçekleşemezse onlara **ayrık olaylar** denir. Bunların çarpımı imkansız bir olaydır, yani $AB = \emptyset$ ve $P(AB) = 0$ 'dır.

Tanım. A ve B olaylarının toplamı, A veya B olaylarından en az birinin gerçekleştiği zaman ve sadece o zaman gerçekleşen olaydır.

A ve B 'nin elemanter olay kümelerinin birleşimine ait tüm elemanter olayları içeren olaydır. A ve B olaylarının toplamı $A + B$ ile gösterilir.

Toplamın olasılığı şu formülle hesaplanır:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

A ve B olayları ayrık ise, $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 'dir.

Örnek 1. Deney bir zar atmaktır. Şu olayları inceleyelim:

A : zarın üst tarafında en az üç nokta görüldü

B : zarın üst tarafında çift sayıda nokta görüldü

A ve B olaylarının çarpımını ve toplamını belirtelim.

Çözüm. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ örnek uzay kümesi, $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \{2, 4, 6\}$

olaylardır. O halde $AB = \{4, 6\}$ dir, $A + B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ dir. Yani A ve B ayrık olaylar değildir, dolayısıyla

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}, \text{ bu da doğrudan hesaplanan } P(A+B) = \frac{5}{6} \text{ değere denktir.}$$

Tanım. A olayının tersi olayı, yalnızca A olayı gerçekleşmediğinde gerçekleşen olaydır.

Bu olay, Ω örneklem uzay kümesine göre A olayının örneklem kümesinin bütünleyicisidir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Ayrıca $A\bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega$ ve $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

A olayının B olayının gerçekleşmesinden sonra gerçekleştiği, yani A olayının B olayından koşullu olduğu bir durumu inceleyelim.

Tanım. A olayının B ye bağlı koşullu olasılığı, B olayı zaten gerçekleştiğinde A olayının olasılığıdır ve $P(A|B)$ ile gösterilir.

B olayının gerçekleşmesi koşuluyla A olayının koşullu olasılığı şu formülle hesaplanır:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ burada } P(B) > 0 \text{ dir.}$$

Bu formülden, koşullu olasılık bilindiğinde A ve B olaylarının çarpımının olasılığı için $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$ formülünü elde ederiz.

Örnek 2. Deney bir zar atmaktır. 5'ten büyük olmayan bir nokta sayısı görüldüğü biliniyorsa, tek sayıda nokta görünme olasılığını belirleyiniz.

Çözüm. Önce ödevdeki olayları gösterelim. A olayı tek sayıda nokta görünmesi ve B olayı 5'ten büyük olmayan bir nokta sayısı görünmesi olsun. O zaman $P(B) = \frac{5}{6}$ ve $P(AB) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, dir, çünkü AB olayı 5'ten büyük olmayan tek sayıda nokta görünmesi

olayıdır. Bu nedenle, koşullu olasılık $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$, tir.

Alıştırma 1. Bir kutuda 4 mavi ve 7 kırmızı top var. Kutudan art arda iki top çekiliyor, geri konulmadan. Çekilen iki topun:

- mavi olması
- kırmızı olması
- farklı renklerde olması olasılığını belirtiniz.

Çözüm. a) Olayları şu şekilde işaretleyelim:

A_1 : İlk çekilen top mavi, A_2 : İkinci çekilen top mavi.

A_1A_2 olayının olasılığını, yani $P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$ değerini bulmamız gerekiyor.

Bu eşitlikte $P(A_1) = \frac{4}{11}$ değerini yerine koyarsak, çünkü ilk çekilen top mavi ise kutuda 10 top kalır ve bunlardan 3'ü mavidir, o zaman $P(A_2 | A_1) = \frac{3}{10}$ dir. O halde $P(A_1A_2)$ için $P(A_1A_2) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{55}$ elde edilir.

b) A_1 ve A_2 olayları sırasıyla kırmızı top çekme olaylarını temsil edecek şekilde benzer şekilde tanımlanırsa, $P(A_1A_2) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{55}$ elde ederiz.

c) Bu durumda, ilk çekilen top kırmızı ise ikinci çekilen topun mavi olması ve tersi durumların olasılıklarının toplamını bulmamız gerekiyor. Olayları şu şekilde tanımlayalım:

A_1 : İlk çekilen top mavi, A_2 : İkinci çekilen top mavi. O zaman ters olaylar $\overline{A_1}$: İlk çekilen top mavi değil, yani kırmızı, ve $\overline{A_2}$: İkinci çekilen top mavi değil, yani kırmızıdır. $A_1\overline{A_2}$ ve $\overline{A_1}A_2$ olaylarının olasılıklarının toplamını bulmamız gerekiyor. Koşullu olasılık formülünü kul

$$\begin{aligned} P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) &= P(\overline{A_2} | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1}) = \\ &= \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = 2 \cdot \frac{28}{110} = \frac{28}{55}. \end{aligned}$$

Alıştırılmalar

1. 5 yeşil ve 3 sarı top içeren bir kutudan art arda iki top çekiliyor. Aşağıdaki olayın olma olasılığını belirtiniz:

a) İkinci çekilen top sarı

b) İlk çekilen top yeşil olduğu bilindiğinde ikinci çekilen topun sarı olması

2. 7 ile bölünebildiği bilindiğinde, ilk otuz doğal sayıdan bir tek sayı seçme olasılığı nedir?

3. Deney bir zar atmaktan oluşur. 3'ten büyük olmayan bir sayı görüldüğü bilindiğinde, çift sayıda nokta görünme olasılığını belirleyin.

4. 52 kartlık bir desteden geri konulmadan iki kart çekilir. Çekilen iki kartın da onlu olma olasılığını belirtiniz.

5.7. Olayların Bağımsızlığı. Toplu Olasılık

Bazı deneylerin ve onlarla ilişkili olayların incelenmesi, yeni kavramların oluşturulmasına yol açar.

Örnek 1. Deney iki zar atmaktan oluşur. Olayları inceleyelim:

A: İlk zarın üst tarafında çift sayı görüldü ve B: İkinci zarın üst tarafında tek sayı görüldü.

A olayının gerçekleşmesinin B olayının gerçekleşmesine bağlı olmadığı açıktır.

Tanım. A olayı, B olayının gerçekleşmesi A olayının olasılığını etkilemiyorsa, yani $P(A|B) = P(A)$ ise A olayı B olayından **bağımsızdır** denir.

A, B'den bağımsız olsun. O zaman

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Bu, B olayının A olayından bağımsız olduğu anlamına gelir, dolayısıyla A ve B bağımsız olaylardır.

A ve B bağımsız olaylar ise, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ eşitliği geçerlidir.

Ters yönde de doğrudur, yani $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ise, A ve B bağımsız olaylardır.

Örnek 1'de olayların bağımsızlığı açıktır, ancak bazen sezgi nedeniyle olayların bağımsızlığı hakkında yanlış bir sonuca varabiliriz.

Örnek 2. Deney 52 kartlık bir desteden bir kart çekmekten oluşur. Olayları inceleyelim:

A: Çekilen kart onlu ve B: Çekilen kart siyah.

A ve B olayları bağımsız mıdır?

Çözüm. Sezgisel olarak, onlu kartların arasında siyah kartlar olduğunu ve tersine siyah kartların arasında onlular olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, olayların bağımsız olmadığını düşünebiliriz.

Açıkça $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ ve $P(AB) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ dır. Bu nedenle,

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ yani A ve B olayları bağımsızdır.

Örnek 3. Bir kutuda 3 beyaz ve 7 siyah top ve diğerinde 4 beyaz ve 3 siyah top vardır. Her kutunun seçilme olasılığı aynıdır. Şunların olasılığını belirleyin:

a) Rastgele seçilen bir kutudan bir beyaz top çekildi

b) Beyaz bir top çekildiği biliniyorsa, top çekme işleminin ilk kutudan yapılmıştır.

Şimdiye kadarki tüm örneklerde bir kutudan top çektik, ancak şimdi eşit olasılıkla seçilebilecek iki kutumuz var. Bu tamamen farklı bir durumdur ve hesaplama için farklı bir prosedür veya formül gerektirir.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylardır ve $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$ için $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. O zaman herhangi bir $B \subseteq \Omega$ olayı için:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2) \cdot P(B | A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B | A_n).$$

Bu formüle toplu olasılık formülü denir.

Şimdi Örnek 3'te şunu işaretleyelim:

A_1 : İlk kutu seçildi, A_2 : İkinci kutu seçildi, o zaman $A_1 A_2 = \emptyset$ ve $A_1 + A_2 = \Omega$ ve

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

a) B olayını beyaz bir top çekilmiş olarak işaretlersek, o zaman

$P(B | A_1) = \frac{3}{10}$ ve $P(B | A_2) = \frac{4}{7}$ dir, bu nedenle toplu olasılık formülüne göre şunu elde ederiz:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{61}{140}.$$

b) Burada $P(A_1 | B)$ 'yi hesaplamamız gerekir, yani

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{P(B)}, \text{ bu nedenle a)'dan elde edilen } P(B) \text{ değerini}$$

yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$P(A_1 | B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{61}{140}} = \frac{21}{61} \text{ elde edilir.}$$

Alıştırılmalar

1. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A + B) = \frac{1}{3}$ ve $P(B) = p$ olduğu bilinmektedir.

a) A ve B olayları ayrık olaylar ise p değerini belirtiniz.

b) A ve B olayları bağımsız olaylar ise p değerini belirtiniz.

2. Deney üç madeni parayı havaya atmaktan oluşur. Olaylar şunlardır: A: üst tarafta üç tura veya üç yazı görüldü, B: üst tarafta en az iki yazı görüldü ve C: üst tarafta en fazla iki tura görüldü. Hangi olay çiftleri bağımsızdır?

3. Üç kutu verilmiştir. İlk kutuda 5 beyaz ve 3 siyah top, ikinci kutuda 4 beyaz ve 4 siyah top ve üçüncü kutuda sadece 8 beyaz top vardır. Rastgele bir kutu seçilir ve ondan bir top çekilir. Çekilen topun siyah olma olasılığını belirtiniz.

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. 2, 3, 4, 5, 6 elemanlarından oluşturulabilecek tüm permütasyonlardan kaç tanesi 3 ile başlar?

2. 0, 2, 4, 6, 8, 9 rakamlarından kaç farklı altı basamaklı sayı oluşturulabilir?

3. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemanlarının kaç permütasyonu şu şekilde başlar:

a) 4 b) 234 c) 1234.

4. 3, 3, 5, 7, 9 rakamlarından kaç beş basamaklı sayı yazılabilir?

5. 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 elemanlarının kaç permütasyonu şu şekilde başlar:

a) 33 b) 212 c) 1234.

6. İkinci sınıflı tekrarsız varyasyonların sayısı 30 ise, kaç farklı eleman vardır?
7. n elemandan üçüncü sınıflı tekrarlı varyasyonların sayısı, aynı sayıdaki elemanların üçüncü sınıflı tekrarsız varyasyonlarının sayısından 96 fazladır. Eleman sayısını belirleyiniz.
8. $V_7^5 : (V_6^4 + V_5^3) = 6$ eşitliğinin doğruluğunu kontrol ediniz.
9. $(C_7^5 + C_9^3 - C_6^4) : C_5^3 = 9$ eşitliğinin doğruluğunu kontrol ediniz.
10. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemanlarının beşinci sınıflı tekrarlı kombinasyonlarının sayısını bulunuz.
11. İkinci sınıflı tekrarlı kombinasyonların toplam sayısı 15 ise kaç farklı eleman vardır?
12. $\overline{C}_7^4 - \overline{C}_3^2 - \overline{C}_5^3 = 169$ eşitliğinin doğruluğunu kontrol edin.
13. Verilenlerden n eleman sayısını bulunuz:
 a) $C_n^2 = 55$ b) $3C_{n+2}^3 = 10C_n^2$.
14. Üçüncü sınıflı tekrarsız kombinasyonların sayısı, aynı sayıdaki elemanların üçüncü sınıflı tekrarlı kombinasyonlarının sayısına göre oranı 2:7 dir. Eleman sayısını bulunuz.
15. Binomları genişletin:
 a) $(3x+2)^6$ b) $(5a+3b)^7$ c) $\left(\frac{a}{b} + 2\sqrt{x}\right)^5$ ç) $\left(a^{-3} + b^{\frac{2}{3}}\right)^4$.
16. Şunları bulunuz:
 a) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^{11}$ binomunun genişlemesindeki üçüncü terim,
 b) $\left(\frac{3x^2}{5a} + \frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$ binomunun açılımındaki yedinci terimi.
17. “matematika” kelimesindeki harfleri 10 küp üzerine sırayla yazılmıştır. 3 küp rastgele seçilir ve bir dizi halinde sıralanır. Harflerin tekrar edebileceği üç harfli kelimeler elde edilir. Temel olaylar kümesini yazınız.
 a) Temel olaylar kümesinin kaç elemanı vardır?
 b) Elde edilen kelimelerde harf tekrarı olmaması olayı kaç temel olay vardır?
18. Bir masa üzerine bir zar, 1 denarlık ve 5 denarlık madeni para atılıyor. Ondan sonra elde edilen sıraya göre nesnelerin üst yüzlerindeki sonuçlar kaydedilir. Temel olaylar kümesinin aşağıdaki olaylara ait alt kümelerini yazınız:
 a) Tüm nesnelerde tek sayı değeri,
 b) Tüm nesnelerin değerlerinin toplamı 3’e bölünebilir ancak çift değil,
 c) Zarın değeri, madeni paraların değerlerinin aritmetik ortalamasına eşittir.
19. Kapalı bir kaptan 5 beyaz, 10 siyah ve 25 kırmızı top vardı. Bir top çekilir. Çekilen topun olasılığını bulunuz:
 A_1 : beyaz top,
 A_2 : siyah top.

A₂: kırmızı top.

20. Bir oyun zar atıldığında aşağıdakilerin gelme olasılığı nedir:

- a) üç nokta,
- b) üç noktadan fazla.

21. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 sayılarından rastgele bir sayı seçilir. Seçilen sayının olasılığı nedir:

- a) çift sayı,
- b) 3 ile bölünebilir sayı,
- c) tek olan ve 3 ile bölünebilir sayı.

22. Kapalı bir kapta 1, 2, 3, 4, 5 ile numaralandırılmış 5 özdeş top vardır. Bunlardan rastgele 3 tanesi çekilir. Çekilen topların olasılığı nedir:

- a) 1, 2, 3 numaralı top,
- b) içlerinden birinin 4 numaralı top olması.

23. Deney, bir madeni paranın iki kez havaya atılmasından oluşur. Olaylar şunlardır: A: ilk atışta tura geldi, B: ikinci atışta tura geldi ve C: tura tam olarak bir kez geldi. Hangi olay çiftleri bağımsızdır?

CEVAPLAR VE TAVSİYELER

Modüler Birim 1

1.1

1. a) Evet, b) Hayır, c) Evet, ç) Evet.
2. a) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, fonksiyonun grafiği x -ekseninin üzerinde sürekli bir çizgidir, y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser ve $3 > 1$ olduğundan fonksiyon artandır.
- b) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, fonksiyonun grafiği x -ekseninin üzerinde sürekli bir çizgidir, y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser ve $\frac{1}{3} < 1$ olduğundan fonksiyon azalandır.
- c) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, fonksiyonun grafiği x ekseninin üzerinde sürekli bir çizgidir, y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser ve $5.2 > 1$ olduğundan fonksiyon artandır.
- ç) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, fonksiyonun grafiği x -ekseninin üzerinde sürekli bir çizgidir, y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser ve $0.4 < 1$ olduğundan fonksiyon azalandır.
3. a) $D_f = \mathbb{R}$, b) $D_f = \mathbb{R}$, c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ç) $D_f = [0, +\infty)$.
4. a) Fonksiyon artandır, b) Fonksiyon azalandır, c) Fonksiyon azalandır, ç) Fonksiyon azalandır.
5. a) $x > y$, b) $x < y$.

1.3

1. a) $x = -3$, b) $x = 0$, c) $x = 8$.
2. a) $x = 8$, b) $x = 2$, c) $x = -15$, d) $x_1 = -1$ ve $x_2 = 4$.
3. a) $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$, b) $x = -1$ ve $x_2 = 5$, c) $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{1}{4}$, ç) $x_1 = -1$ ve $x_2 = 2$.

Tekrarlama Alıştırmaları

3. a) $x = y$, b) $x > y$, c) $x < y$. 4. a) $a^{\frac{3}{4}}$, b) $a^{\frac{2}{3}}$. 5. $x = 8$. 6. $x = 2$. 7. $x = -15$.
8. $x = 1$. 9. $x = 1$. 10. 4. 11. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$.

Modüler Birim 2

2.1

1.	İfade	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a (b + 2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
	logaritma	3	2	4	5	$\frac{1}{2}$
	logaritmanın tabanı	6	x	$\sqrt{7}2$,	a	25
	logaritması aranan	216	$\frac{4}{9}$	49	$b + 2$	5

2. a) -2 , b) 2 , c) $\frac{1}{2}$, ç) $-\frac{1}{2}$. 3. a) $x = \sqrt{3}$, b) $x = 6$, c) $x = 1$, ç) 5 . 4. a) 2 , b) 9 .
5. a) 1 , b) 30 . 6. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2.2.

1. a) $\log 3ab = \log 3 + \log a + \log b$, b) $\log a^2bc^5 = 2\log a + \log b + 5\log c$,

c) $\log \frac{ab}{2c} = \log a + \log b - \log 2 - \log c$, ç) $\log 2(a-b) = \log 2 + \log(a-b)$,

d) $\log \frac{\sqrt{a}}{b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\log a - \log(b^2 - c^2)$, e) $\log \sqrt{a^3b^2} = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b$.

2. a) $x = 10$, b) $x = \frac{8}{9}$, c) $x = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2}}$, ç) $x = \sqrt[4]{\frac{4^6}{3^4}}$.

3. a) 0,60; 0,78; 0,90; 0,96; b) 1,08; 1,20; 1,26 . 4. a) -3, b) 3, c) -1, ç) -1.

2.3.

1. Tavsiye: a) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1$,

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 4} \cdot \log_5 4 \cdot \frac{1}{\log_5 6} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 7}{\log_5 8}$.

2. 8. 3. a) $-\frac{1}{2}$, b) -18, c) $\sqrt{5}$. 4. $\log_b a = \log \left(\frac{1}{b}\right)^{-1} a = -\log \frac{1}{b} a$.

2.4.

1. a) Evet, b) Hayır, c) Hayır, ç) Hayır.

2. a) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, fonksiyonun grafiği I. ve IV. dördülden geçen sürekli bir çizgidir ve x eksenini (1, 0) noktasında keser. Fonksiyon monoton olarak artandır çünkü $5 > 1$ 'dir.

b) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, fonksiyonun grafiği I. ve IV. dördülden geçen sürekli bir çizgidir ve x eksenini (1, 0) noktasında keser. Fonksiyon monoton olarak azalandır çünkü $0,3 < 1$ 'dir.

c) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, fonksiyonun grafiği I. ve IV. dördülden geçen sürekli bir çizgidir ve x eksenini (1, 0) noktasında keser. Fonksiyon monoton olarak azalandır çünkü $1/7 < 1$ 'dir.

3. a) $\mathbb{R}^+$, b) $(-9, +\infty)$, c) $(4, +\infty)$, ç) $(-\infty, -1) \cdot (0, +\infty)$, d) $(-\infty, -1) \cdot (-2/3, +\infty)$

4. a) Monoton azalan, b) Monoton azalan, c) Monoton artan.

5. a) a, b) b.

2.5.

3. a) Pozitif, b) Pozitif, c) Negatif, ç) Negatif.

4. a) $y > 0$ için $x \in (0, 1)$, $y < 0$ için $x \in (1, 100)$.

b) $y > 0$ için $x \in (-1, +\infty)$, $y < 0$ için $x \in (-2, -1)$, c) $y > 0$ için $x \in (1, 2)$, $y < 0$ için $x \in (2, +\infty)$.

2.6.

1. $x_{1,2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$. 2. $x_1 = 4$ ve $x_2 = 1$. 3. $x_1 = 2$. 4. $x_1 = 7$ ve $x_2 = \frac{16}{3}$. 5. $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

6. $x_1 = 16$. 7. 4.

Tekrarlama Alıştırmaları

1. a) $x=4$, b) $x=\frac{1}{81}$, c) $x=\frac{1}{10}$, ç) 343, d) $x=\frac{1}{2}$, e) 19683, f) $\sqrt[5]{100}$, g) $x=2$,
ğ) 0,04.

2. a) $\log 2 + \log x + \log y$, b) $\log 3 + 2 \log x + 3 \log y$, c) $2 \log x + 5 \log y + \frac{1}{2} \log z$,
ç) $\sqrt{b} \log a + 3 \log c$, d) $\log 6 + \log x + \frac{2}{3} \log y$, e) $\frac{1}{2}(\log 2 + \log x) + \frac{1}{4}(3 \log x + \frac{1}{2} \log y)$,
f) $\frac{1}{2}(\log x + \frac{3}{4} \log y)$.

3. a) $x=6$, b) $x=10$, c) $x=21$, ç) $x=1125$, d) $x=\frac{5}{9}$.

4. a) $x \approx 6,73$, b) 0,00884, c) 76,296, ç) $x=42$.

5. a) $2 \log_4 5$, b) $\frac{2}{\log_{\sqrt{7}} 3}$, c) $-\log_{\frac{1}{10}} 5$.

6. a) $\frac{1}{35}$, b) $\log_2 \sqrt{\frac{x}{x+1}}$. 7. a) 8, b) 1.

9. a) $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, b) $x \in (-1, +\infty)$, c) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, ç) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

10. $x_1=1$. 11. $x_1=5$. 12. $x_1=25$. 13. $x_{1,2}=1 \pm \sqrt{3}$. 14. $x_1=7$. 15. $x_1=\frac{3}{2}$ ve $x_2=10$.

16. $x=\frac{1}{12}$. 17. $x_1=\frac{5}{4}$ ve $x_2=3$. 18. $x_1=1$ ve $x_2=10$.

Modüler Birim 3

3.1.

1. a) $\frac{2\pi}{3}$, b) $-\frac{3\pi}{2}$, c) 0. 2. a) 135° , b) $-157,5^\circ$, c) $\left(\frac{1800}{\pi}\right)^\circ$. 3. a) $20^\circ + 3 \cdot 360^\circ$,
 $-320^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$, c) $-\frac{\pi}{3} + (-3) \cdot 2\pi$. 4. $-60^\circ + (-8) \cdot 360^\circ = -2940^\circ$.

3.2.

1. a) II dördül, b) I dördül, c) II dördül. 2.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

3.3.

1. a) Negatif işaret, b) Pozitif işaret, c) Negatif işaret, ç) Negatif işaret. 2. a) Negatif işaret, b) Negatif işaret, c) Pozitif işaret. 3. a) I veya III dördül, b) III veya IV dördül.

3.4.

1. a) 0, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ç) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$, e) 0, f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, ğ) 1, h) $\sqrt{3}$, ı) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, i) $\sqrt{3}$. 3. a) $\sqrt{3}$, b) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 4. a) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, ç) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.5

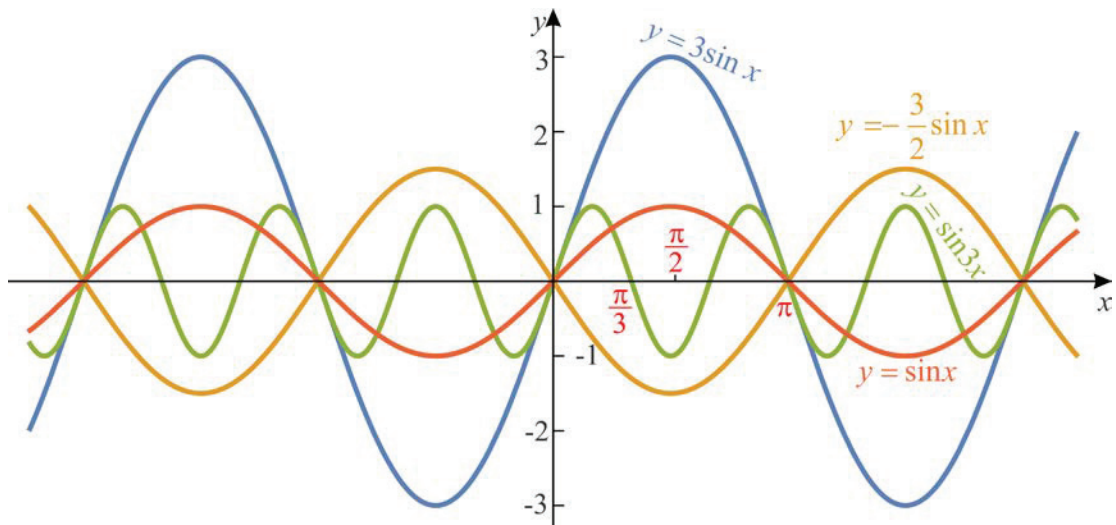
1. a) 0,8, b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 2. a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, b) $-\frac{8}{15}$. 3. a) 1, b) $\cos^2 \alpha$, c) $-\operatorname{tg}^2 \alpha$.
 4. $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{40}{9}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{9}{40}$, b) $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$,
 B) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$. 5. 0.

3.7.

1. $y = 3 \sin x$

2. $y = -\frac{3}{2} \sin x$

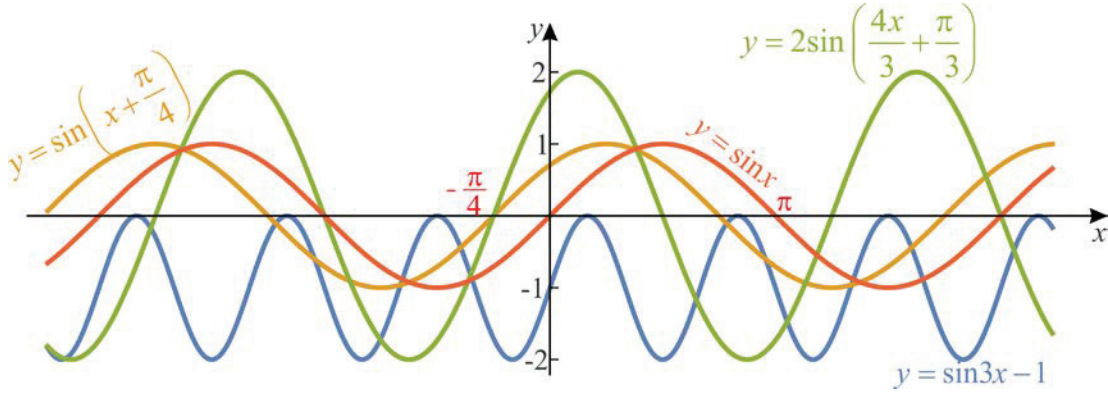
3. $y = \sin 3x$



4. $y = \sin 3x - 1$

5. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

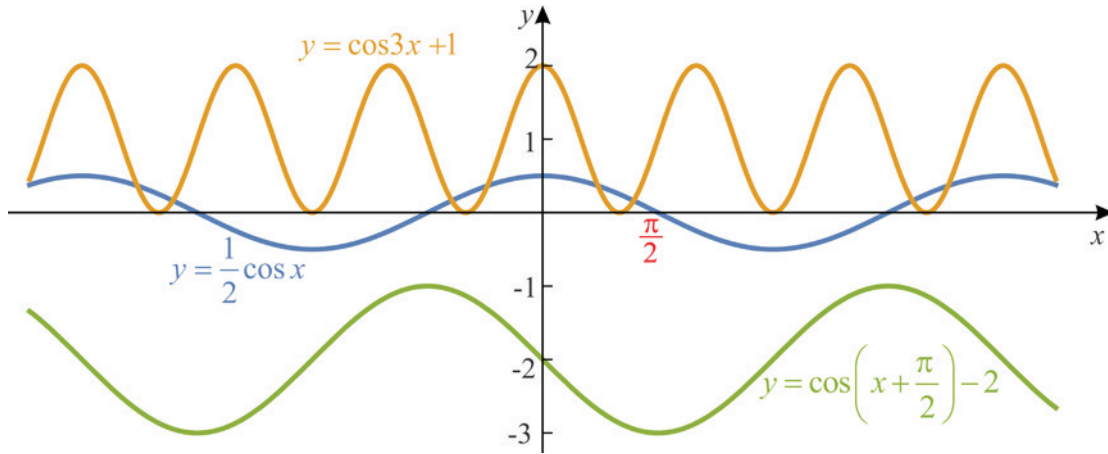
6. $y = 2\sin\left(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$



7. $y = \frac{1}{2}\cos x$

8. $y = \cos 3x + 1$

9. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$



3.8.

1. a) $-\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) 0 . 2. a) $\cos 2\alpha$, b) 0 , c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a) 3 , b) $\frac{8\sqrt{3} + 7\sqrt{2}}{23}$.

3.9.

1. a) $-\frac{120}{169}$, b) $\frac{119}{169}$, c) $-\frac{120}{119}$, d) $-\frac{119}{120}$. 2. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8}}{8}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{56}}{8}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{7}$. 3. a) $\sin 40^\circ$, b) $\cos \frac{\pi}{5}$, c) $-\frac{1}{2}\sin \alpha$, d) $\operatorname{tg} 10^\circ$.

4. $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$. 5. a) $2\sin 50^\circ$,

b) $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$, c) $2\cos 20^\circ$, d) $\cos 18^\circ$.

3.10

1. $2 \cos 2 - 1$. 2. $\frac{1}{2}(\cos 12\alpha + \cos 2\alpha)$. 3. a) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$, b) $\frac{\sin \alpha}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.
5. a) $2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ$, b) $-2 \sin 60^\circ \sin 13^\circ$, c) $2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ$.

3.11.

1. çözümü yoktur 2. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 4. çözümü yoktur. 5. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
6. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 7. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 8. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 9. $x = \frac{31\pi}{90} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 10. $-0,32 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 11. $x_1 = -0,41 + 2k\pi, x_2 = 0,41 + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
12. $x_1 = 0,93 + k\pi, x_2 = -0,93 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.12

1. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 2. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 4k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. $x_1 = \frac{1}{6} + 2k, x_2 = -\frac{1}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + (2k+1)3\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 6k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
5. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 6. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
7. $x = \frac{7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 8. $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 9. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
10. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 11. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 12. $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$.
13. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 14. $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 15. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
16. $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 17. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
18. $x_1 = 1,1 + k\pi, x_2 = 0,46 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 19. $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tekrarlama Alıştırmaları

1. a) $\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{450}$. 2. $337^\circ 30'$. 3. a) $\cos 42^\circ, -\sin 35^\circ, -\sin 64^\circ$,
b) $-\cos 32^\circ, -\cos 16^\circ, \cos 48^\circ$, c) $-\operatorname{tg} 4^\circ, \operatorname{tg} 62^\circ, -\operatorname{tg} 69^\circ$,
r) $-\operatorname{ctg} 27^\circ, \operatorname{ctg} 26^\circ, -\operatorname{ctg} 36^\circ$. 4. a) $-0,99027$, b) $-0,34433$, c) $-0,93358$,
r) $0,48773$. 5. a) $3,90951$, b) $-4,58268$, c) $1,34622$.
6. a) $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{87}{425}$, b) $\frac{2\sqrt{8} + \sqrt{5}}{9}$, c) $\frac{\sqrt{35} + 6}{12}$, d) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{38}{41}$,
 $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{2}{11}$. 7. a) $\sin 2\alpha = \frac{12}{13}, \cos 2\alpha = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{12}{5}, \operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{5}{12}$,
b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{30}}{10}, \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{70}}{10}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{3}$, c) $\frac{20\sqrt{2} - 27}{45}$.

8. a) $2 \sin 50^\circ \cos 12^\circ$, b) $2 \cos 34^\circ \cos 26^\circ$, c) $2 \sin 19^\circ \cos 45^\circ$, ç) $-2 \sin 48^\circ \sin 26^\circ$.

10. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ç) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

f) $x_1 = \frac{5\pi}{36} + 2k\pi, x_2 = \frac{31\pi}{36} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ g) $x_1 = \frac{\pi}{18} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{18} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ğ) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ h) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ı) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

i) $x_1 = 2k\pi, x_2 = (2k+1)\pi, x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

j) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ k) $x_{1/2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

l) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

m) $x_{1/2} = \pm \pi + 2k\pi, x_{3/4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ n) $x_{1/2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

o) $x_1 = \pi + 2k\pi, x_2 = -\pi + 2k\pi, x_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Modüler birim 4

4.1.

1. a) II. dördülde, b) II. dördülde, c) III. dördülde, ç) I. dördülde, d) x ekseninde, e) y ekseninde, f) y ekseninde, g) y ekseninde.

2. $m_x = 1$ ve $m_y = 4$, $m_x = 5$ ve $m_y = 2$.

4. a) $d = \sqrt{82}$, b) $d = 4$, c) $d = 3\sqrt{5}$, ç) $d = 3\sqrt{5}$. 5. hayır. 6. $y = 11$ veya $y = -1$.

7. $C(21,18)$.

4.2.

1. $S_{AB}\left(4, -\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1, -\frac{7}{2}\right)$. 2. 5.

3. a) $\left(5, \frac{9}{5}\right)$, b) $\left(6, \frac{11}{5}\right)$, c) $(-7, -3)$, ç) $(18, 7)$. 5. $A(-2, -6)$, $B(8, 2)$, $C(-6, 10)$.

4.3.

1. $P = 21$. 2. hayır. 3. evet. 4. $P = 15$. 5. $P = \frac{55}{2}$.

4.4.

1. Sadece P noktası doğruya aittir. 2. a) $y = x$, b) $y = -x$, c) $y = 0$.

3. a) $k = 2$, $m = -3$, b) $k = -1$, $m = 3$, c) $k = 0$, $m = -2$, ç) $k = \sqrt{3}$, $m = 0$.

4. $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$. 5. $y = -x - 1$.

4.5.

1. a) $2x - 3y - 3 = 0$, b) $y + 4 = 0$, c) $x - 3 = 0$.

2. a) $k = 2$, $m = 3$, b) $k = \frac{5}{2}$, $m = \frac{3}{2}$, c) $k = -\frac{3}{8}$, $m = -\frac{16}{3}$. 3. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $m = 3$.

5. $A > 0$ ve $B < 0$ veya $A < 0$ ve $B > 0$.

4.6.

1. $3x + y + 5 = 0$. 2. $x + y + 3 = 0$.

3. a) $2x + y - 11 = 0$, b) $x - y - 10 = 0$, c) $3x - 2y - 27 = 0$.

4. a) $y + 1 = 0$, b) $3x - y - 10 = 0$, c) $x - y - 4 = 0$.

5. a) $x + y + 1 = 0$, b) $x + 2y + 3 = 0$, c) $x - 3y + 7 = 0$.

4.7.

1. a) $k = -\frac{7}{5}$, b) $k = -5$, c) $k = 0$. 2. $7x + 5y - 13 = 0$. 3. hayır. 4. $y = 2x$.

5. $3x + 4y + 16 = 0$, $5x + y - 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

4.8.

1. a) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$, 4 birim x -ekseninde, 6 birim y -ekseninde,

b) $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, 1 birim x -ekseninde, 1 birim y -ekseninde,

c) $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1$ $\frac{1}{2}$ birim x -ekseninde, 1 birim y -ekseninde.

2. $k = \frac{6}{85}$. 3. 18 birim kare. 4. $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$.

5. a) $b = -a$, b) $b = a$, c) $b = -a\sqrt{3}$.

4.9.

1. c), d) ve e) şıklarındaki çözüm. 2. a) $M = \frac{1}{\sqrt{5}}$, b) $M = \frac{1}{\sqrt{101}}$, c) $M = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

3. a) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0$, b) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3 = 0$, c) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{2} = 0$,

c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$, d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$, e) $x \cos 10^\circ + y \sin 10^\circ + 4 = 0$.

4. a) $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$, b) $-\frac{1}{\sqrt{26}}x + \frac{5}{\sqrt{26}}y - \frac{10}{\sqrt{26}} = 0$, c) $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$.

4.10

1. $d = \frac{7}{5}$, hayır. 2. $d = \frac{2}{3}$. 3. $d_M = \frac{10}{\sqrt{5}}$ ve $d_M = \frac{8}{\sqrt{5}}$. 4. $\frac{198}{\sqrt{97}}$, $\frac{99}{\sqrt{130}}$ ve $\frac{22}{\sqrt{5}}$.

5. $x + y = 7 \pm 5\sqrt{2}$. 6. $4x - 3y + 26 = 0$ ve $4x - 3y + 26 = 0$.

4.11.

1. **a)** (1, 2) noktasında kesişiyorlar, **b)** paraleldirler **c)** çakışıklırlar.

2. $A = 4$ ve $B = 2$. 3. $5x - 6y + 28 = 0$. 4. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 5. a), b), d) ve e) şıklarındaki doğrular.

6. $5x + 3y - 60 = 0$.

4.12.

1. $x^2 + y^2 = 25$.

2. **a)** $S(-7, 0)$, $r = 3$, **b)** $S(-6, 8)$, $r = 6$, **c)** $S(35, 12)$, $r = 37$, **d)** $S(-30, -30)$, $r = 30$.

3. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$. 4. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$.

5. **a)** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, **b)** $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$.

4.13.

1. (3, -1) ve (2, -2). 2. $\sqrt{90}$.

Tekrarlama Alıştırmaları

1. $4(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{13})$. 2. **a)** $M(7, 1)$, **b)** $M(14, 1)$. 3. $\lambda = \frac{1}{2}$. 4. $6x - y - 5 = 0$.

5. $7x + 10y + 29 = 0$. 7. $D(1, -5)$. 9. **a)** $d = \frac{7}{5}$, **b)** $d = 1$.

10. $x - 3 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$, $x + 3y - 13 = 0$. 11. **a)** $T(-4, 0)$.

12. **a)** $3\sqrt{10}$, **b)** $\sqrt{10}$, **c)** 15. 13. $P = 49$. 14. $4x + 3y - 120 = 0$, $48x + 9y + 72 = 0$.

15. **a)** $T\left(\frac{17}{12}, 11\right)$, **b)** $P = \frac{105}{8}$. 16. $3x + 8y - 7 = 0$ ve $8x - 3y + 7 = 0$.

17. $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 6, 25$. 18. $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{5}\right)^2 = 533$.

Modüler birim 5**5.1**

1. 120. 2. 720. 3. 120. 4. 2205.

5.2.

1. 210. 2. 5!. 3. $V_8^3 = 6720$, $\overline{V}_8^5 = 8^5 = 32768$. 4. 7. 5. $n = 4$.

5.3.

1. 20. 2. 5. 3. 20. 4. $n_1 = 7, n_2 = 2$. 5. 38226

5.4.

1. $243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$.

2. $a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 6abc$.

3. $1 - 12y + 60y^2 - 160y^3 + 240y^4 - 192y^5 + 64y^6$.

4. $243x^5 + 405x^2 + 270x^3 + 90x^2 + 15x + 1$.

5. $x^2 + 4x^{3/2}y^{1/2} + 6xy + 4x^{1/2}y^{3/2} + y^2$. 6. $x^{4/3} - 4x + 6x^{2/3} - 4x^{1/3} + 1$. 7. $\frac{35}{81}x^3y^4$.

5.5.

1. a) 0,12; b) 0,4; 2. $\frac{1}{4}$. 3. $\frac{1}{36}$. 4. $\frac{1}{6}$. 5. $P \approx 0,109$. 6. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{1}{5}$, c) $\frac{1}{2}$.

5.6.

1. a) $\frac{21}{56}$, b) $\frac{15}{56}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{1}{221}$.

5.7.

1. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{9}$. 2. $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{7}{8}$, A ve B bağımsızdır A ve B.
 3. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$, $P(B|A_1) = \frac{3}{8}$, $P(B|A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B|A_3) = 0$, bu yüzden
 $P(B) = \frac{7}{24}$.

Tekrarlama Alıştırmaları

1. 24. 2. 600. 3. a) 720, b) 24, c) 6. 4. 12. 5. a) 2520, b) 560, c) 210.

$$6. n = 6. 7. n = 6, 8. V_7^5 : (V_6^4 + V_5^3) = \frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{6!}{2!} + \frac{5!}{2!}} = \frac{7!}{6! + 5!} = \frac{7!}{5!(6+1)} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 7} = 6$$

$$9. (C_7^5 + C_9^3 - C_6^4) : C_5^3 = \frac{\binom{7}{5} + \binom{9}{3} - \binom{6}{4}}{\binom{5}{3}} = \frac{21 + 84 - 15}{10} = \frac{105 - 15}{10} = 9.$$

$$10. \bar{C}_7^5 = \binom{11}{5} = 462. 11. n = 5. 12. \bar{C}_7^4 - \bar{C}_3^2 - \bar{C}_5^3 = \binom{10}{4} - \binom{4}{2} - \binom{7}{3} = 169. 13. 4.$$

$$14. 5. 15. \frac{1}{a^{12}} + \frac{4\sqrt[3]{b^2}}{a^9} + 6\frac{b\sqrt[3]{b}}{a^6} + 4\frac{b^2}{a^3} + b^2\sqrt[3]{b^2}. 17. a) 120 b) 10.$$

$$18. a) A = \{(1,1,5), (3,1,5), (5,1,5)\}, b) B = \{(3,1,5), (4,G,5), (2,1,G), (3,G,G)\}, c) C = \{(3,1,5)\}. 19. a) \frac{1}{8}, b) \frac{1}{4}, c) \frac{5}{8}. 20. a) \frac{1}{6}, b) \frac{1}{2}. 21. a) \frac{1}{2}, b) \frac{2}{5}, c) \frac{1}{5}. 22.$$

$$\frac{1}{10}. 23. \text{Tüm olay çiftleri.}$$

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	3
1. ÜSTEL FONKSİYON. ÜSTEL DENKLEM	
1.1. Üstel Fonksiyonun Kavramı ve Temel Özellikleri	5
1.2. Üstel Fonksiyonun Grafiği	8
1.3. Üstel Denklem	13
2. LOGARİTMİK FONKSİYON. LOGARİTMİK DENKLEM	
2.1. Logaritma Kavramı	18
2.2. Logaritma Kuralları	20
2.3. Farklı tabanlı Logaritmalar Arasındaki İlişkiler	24
2.4. Logaritmik Fonksiyonun Kavramı ve Temel Özellikleri	25
2.5. Logaritmik Fonksiyonun Grafiği	28
2.6. Logaritmik Denklemler	32
3. HERHANGİ BİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI	
3.1. Açı Ölçümü. Açı Kavramının Genişletilmesi	38
3.2. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının Tanımı	42
3.3. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının İşareti. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının Değişimi	47
3.4. Herhangi Bir Açının Trigonometrik Fonksiyonlarının Dar Açılı Trigonometrik Fonksiyonlarına İndirgenmesi	50
3.5. Trigonometrik İfadelerin Sadeleştirilmesi	55
3.6. Temel Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri	57
3.7. Trigonometrik Fonksiyonların Grafiklerinin Çizimi	67
3.8. Adisyon Formülleri	75
3.9. Çift Açılı ve Yarım Açılı Trigonometrik Fonksiyonları	81
3.10. Trigonometrik Fonksiyonların Dönüşümü	85
3.11. Trigonometrik Denklemler	87
3.12. Temel Trigonometrik Denklemlere İndirgenen Trigonometrik Denklemler	92
4. DÜZLEMDE ANALİTİK GEOMETRİ	
4.1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık	97
4.2. Bir Doğru Parçasının Verilen Oranda Bölünmesi	101
4.3. Üçgenin Alanı	103
4.4. Doğru Denkleminin Açık Şekli	105
4.5. Doğru Denkleminin Genel Şekli	108
4.6. Bir Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi	110
4.7. İki Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi	112

4.8.	Doğru denkleminin Eksen Parçaları Cinsinden Denklemi	114
4.9.	Doğru Denkleminin Normal Şekli	116
4.10.	Bir Noktadan Doğruya Olan Uzaklık	118
4.11.	İki Doğrunun Karşılıklı Durumları	121
4.12.	Çember	125
4.13.	Doğru ve Çemberin Karşılıklı Durumları	127

KOMBİNASYONLUK VE OLASILIK

5.

5.1.	Permütasyonlar	131
5.2.	Varyasyonlar	133
5.3.	Kombinasyonlar	135
5.4.	Binom Formülü	138
5.5.	Klasik Olasılık	140
5.6.	Koşullu Olasılık	144
5.7.	Olayların Bağımsızlığı. Toplu Olasılık	147

CEVAPLAR VE TAVSİYELER	151
------------------------------	-----

